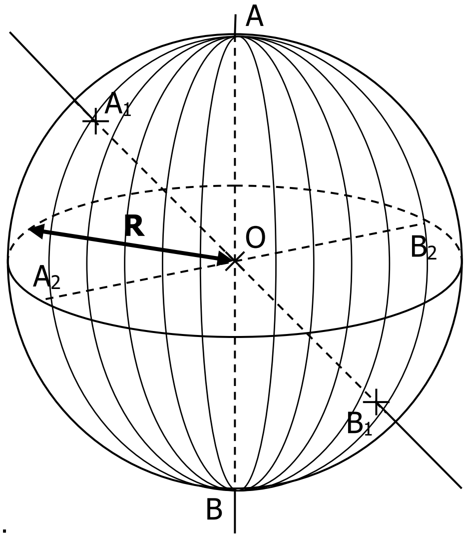
Séquence n°15

SE REPERER ET SE REPRESENTER DANS L'ESPACE (2) : SPHERES et BOULES

I. Définitions et vocabulaire



Définition Soit O un point de l'espace.

On appelle ***sphère de centre O et de rayon R*** l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés **à une même distance** R du point O.

On appelle ***boule de centre O et de rayon R*** l'ensemble de tous les points de l'espace qui sont situés **à une distance** du point O **inférieure ou égale à R**.

Autrement dit

La boule correspond à la sphère et l'intérieur de la sphère…

Exemple Sur le schéma ci-contre :
- les points A, A_1 et A_2 appartiennent à la sphère, et donc aussi à la boule.
- le point C appartient à la boule car il est à l'intérieur (mais pas à la sphère).
- le point D n'appartient ni à la sphère, ni à la boule…

Vocabulaire Les segments [AB], [A_1B_1] et [A_2B_2] sont des ***diamètres*** de la sphère.
On dit que les points A et B sont diamétralement opposés.

EXERCICE TYPE 1

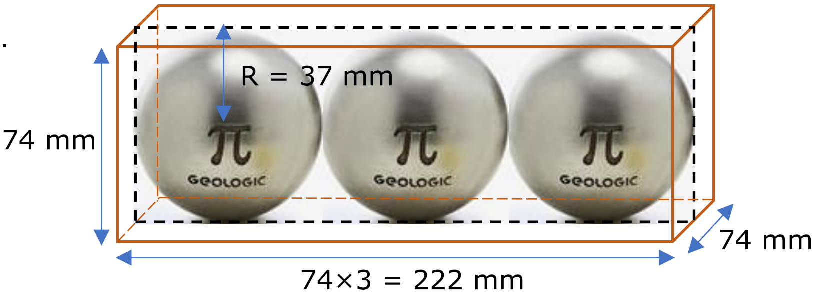
On considère trois boules de pétanque de rayon R = 37 mm.

Quelles dimensions minimales doit avoir une boîte parallélépipédique (pavé droit) pour que l'on puisse y ranger ces trois boules de pétanque ?
Faire un croquis.

Solution Voir le croquis ci-contre…

Comme le rayon d'un boule est de 37 mm, son diamètre est 74 mm.

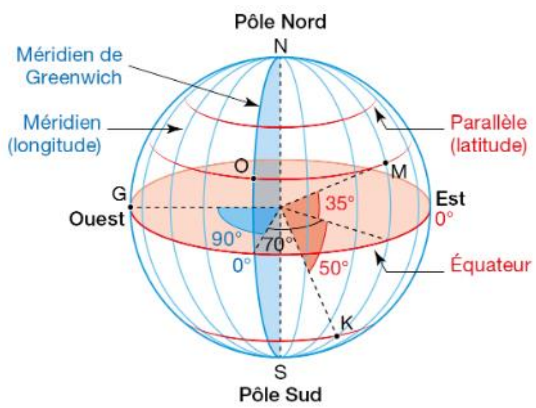
Les dimensions minimales de la boîte sont :
- longueur = 74 mm x 3 = 222 mm
- largeur = 74 mm
- hauteur = 74 mm.



II. *Se repérer sur la Terre*

Sur le globe terrestre, on peut se repérer à partir de lignes imaginaires créées selon la direction Est/Ouest avec des méridiens, et la direction Nord/Sud avec les parallèles :

- Les **méridiens** sont des demi-cercles (en bleu sur la figure) dont les extrémités sont les pôles Nord et Sud. On utilise le méridien de Greenwich comme méridien 0° : les autres méridiens sont repérés par la **longitude** qui est l'angle formé avec le méridien de Greenwich vers l'Est (E) ou l'Ouest (O).
- Les **parallèles** sont des cercles (en rouge sur la figure) situés dans les plans parallèles au plan de l'équateur qui est le parallèle 0°. Les autres parallèles sont repérés par la **latitude** qui est l'angle formé avec l'équateur, vers le Nord (N) ou le Sud (S).

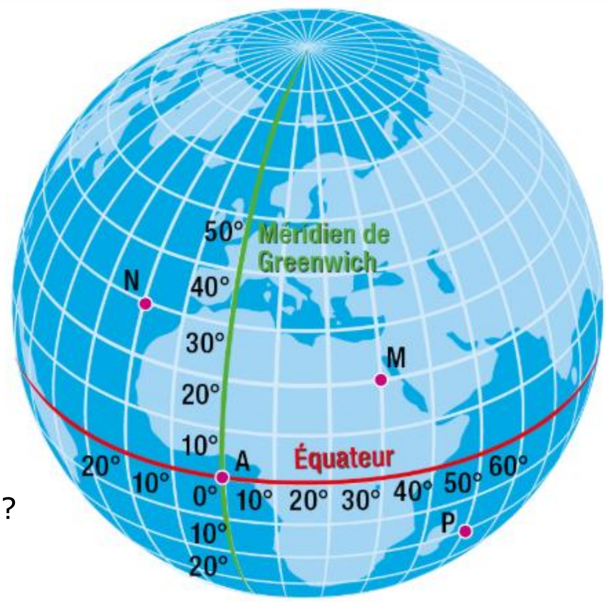


<u>*Exemple*</u> Sur la figure ci-contre, on a les coordonnées suivantes :
G : 90° Ouest et 0° Nord ; M : 70° Est et 35° Nord ; K : 70° Est et 50° Sud.
(M et K sont sur le même méridien mais pas sur le même parallèle…)

EXERCICE TYPE 2

1. Lire les coordonnées géographiques des points M, N et P représenté ci-contre sur le globe terrestre.
2. **a.** Un avion est parti du point M, puis s'est déplacé de 30° vers l'Ouest et de 20° vers le Nord, pour une escale.
Quelles sont ses nouvelles coordonnées ?
Dans quel pays semble-t-il être arrivé ?

   b. Ce même avion repart et se déplace alors de 100° vers l'Est et de 20° vers le Sud.
Dans quel continent cet avion est-il arrivé ?



<u>*Solution*</u>

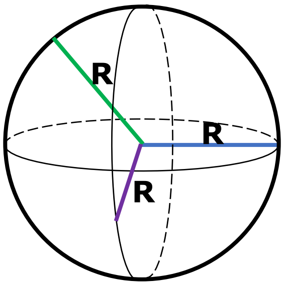
1. Les coordonnées géographiques des points M, N et P sont :
M : **30° Est 20° Nord** ; N : **20° Ouest 30° Nord** ; P : **50° Est 20° Sud**
2. **a.** Les nouvelles coordonnées de l'avion sont : **0° Est/Ouest 40° Nord**.
(L'avion est situé sur le méridien de Greenwich.)
Il semble que l'avion soit arrivé en **France**…

   b. Après s'être déplacé de 100° vers l'Est et de 20° vers le Sud, l'avion sera sur l'**Asie**.

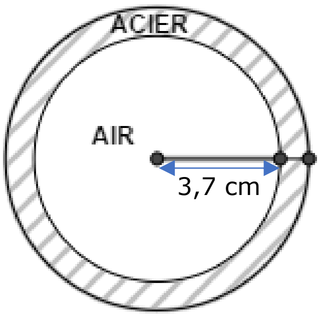
III. *Volume d'une sphère (ou d'une boule)*

Sphère et boule

- Aire de la sphère = $\mathbf{4\pi R^2}$
- Volume de la sphère = $\mathbf{\frac{4}{3}\pi R^3}$



EXERCICE TYPE 3 Calculer le volume des deux solides suivants :



On considère une boule de pétanque de rayon 3,7 cm.
Elle est constituée en acier mais est creuse à l'intérieur (voir le croquis ci-contre).
On donnera les résultats arrondis à l'unité près.

1. Calculer l'aire de la surface de cette boule de pétanque.

2. Calculer le volume d'acier compris dans cette boule de pétanque.

Solution

1. Le diamètre de la boule de pétanque est 7,4 cm et son rayon est 7,4 ÷ 2 = 3,7 cm.
L'aire de la surface de cette boule de pétanque est donc de :
$4\pi R^2 = 4\times\pi\times3{,}7^2 = \mathbf{54{,}76\pi\ cm^2} \approx \mathbf{172\ cm^2}$.

2. Le volume correspond à la différence entre le volume total de la boule et le volume d'air…

Calculons le volume total de la boule : $V_{Boule} = \frac{4}{3}\pi\ R^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times3{,}7^3 \approx 212\ cm^3$.

Calculons le volume de l'air : $V_{Air} = \frac{4}{3}\pi\ R^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times3^3 = 36\pi \approx 113\ cm^3$.

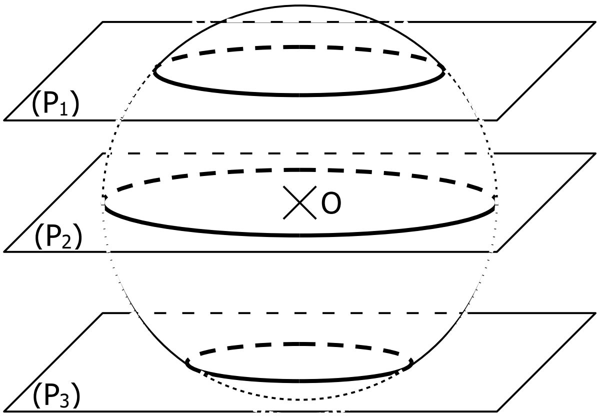
Le volume d'acier compris dans cette boule est donc :
$V_{Boule} - V_{Air} \approx 212 - 113 = \mathbf{99\ cm^3}$.

*On donne une **valeur exacte**, puis une valeur approchée.*

IV. Section d'une sphère (ou d'une boule) par un plan

<u>*Théorème*</u> (admis)

La section d'une sphère par un plan est un cercle.

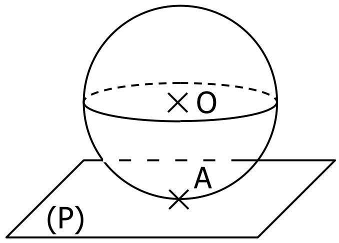


<u>*Remarque*</u>

Quand le plan passe par le centre O (Plan P_2),
le cercle a le même rayon que la sphère.
On parle alors de « *grand cercle* ».

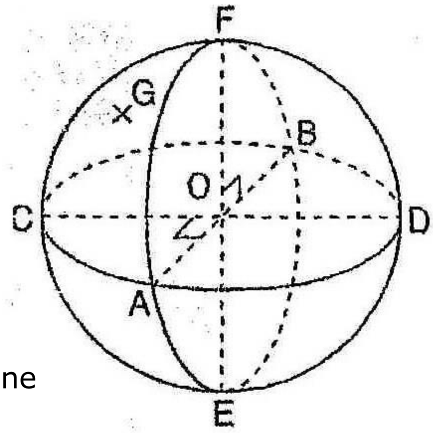
<u>*Cas particulier*</u>

Quand la section de la sphère par le plan n'est qu'un point,
on dit que **le plan est tangent à la sphère**.



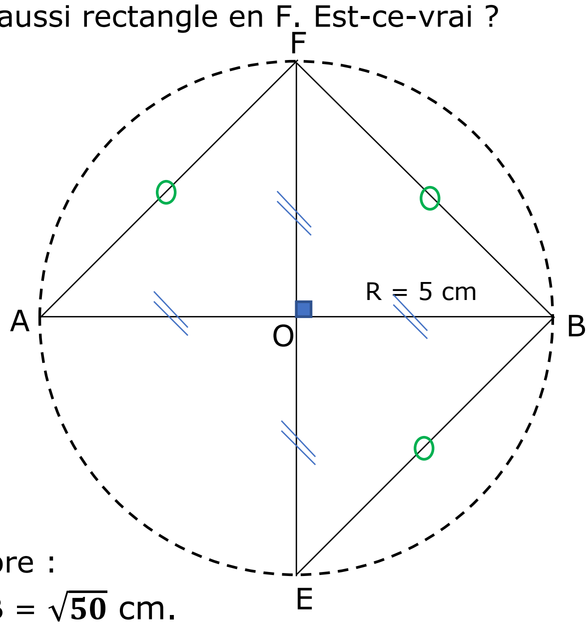
EXERCICE TYPE 4

Le dessin ci-contre représente une sphère de rayon 5 cm et de centre O.
Les diamètres [AB] et [CD] sont perpendiculaires, ainsi que les diamètres [FE] et [AB].



1. Peut-on dire que OG < 5 cm ? Justifier.
2. Construire, <u>sur une même figure</u> et en vraie grandeur, les triangles EOB et AFB.
3. Donner la nature précise du triangle EOB et déterminer une valeur exacte de la longueur EB.
4. Le triangle AFB est isocèle en F. Mais il semble aussi rectangle en F. Est-ce-vrai ?

<u>*Solution*</u>



1. On ne peut pas affirmer que 0G < 5 cm car on ne sait pas si le point G est à l'intérieur de la sphère. Il se peut qu'il soit devant ou même derrière à l'extérieur de la sphère…
2. Pour réaliser la construction le plus simplement possible, il convient de construire tout d'abord le cercle de centre O et de diamètres [AB] et [EF] qui sont perpendiculaires. *Voir la figure ci-dessous qui n'est pas en vraie grandeur…*
3. Le triangle OEB est isocèle et rectangle en O.
   On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :
   $EB^2 = OB^2 + OE^2 = 5^2 + 5^2 = 50$ donc $EB = \sqrt{50}$ cm.
4. Par symétrie, on sait que $AF = FB = \sqrt{50}$ cm.
   Ainsi, on a : $AF^2 + FB^2 = 50 + 50 = 100$ et $AB = 10^2 = 100$.
   L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on peut conclure que le triangle AFB est bien rectangle en F.