Séquence n°13

MODELISER ET SIMULER UNE EXPERIENCE ALEATOIRE : NOTIONS DE PROBABILITES

Les **probabilités** est une théorie qui propose des modèles **pour prévoir sans avoir expérimenté** le résultat d'expérience dans lequel intervient le **hasard**…

Les probabilités sont utilisées dans de nombreuses situations sociales, économiques, ludiques, industriels… souvent en lien avec les statistiques : voir la séquence « Outils statistiques ».

I. *Modéliser une expérience aléatoire : premières notions de probabilité*

Définition Une **expérience aléatoire** est une expérience dans laquelle intervient le hasard.
On ne peut pas prévoir le résultat réel à l'avance mais on peut lister les différents résultats possibles que l'on appelle **issues**.
Plusieurs issues regroupées ensemble constituent un **évènement**.
La **probabilité** d'un évènement est en fait « proportion de chances » que celui-ci se réalise…

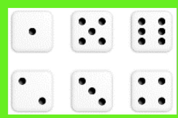
Exemple

Expérience aléatoire

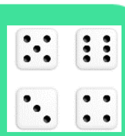
On lance un dé et on observe la face du dessus.

Issues

Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.



Evènement



"Obtenir un nombre strictement plus grand que 2".

Probabilité

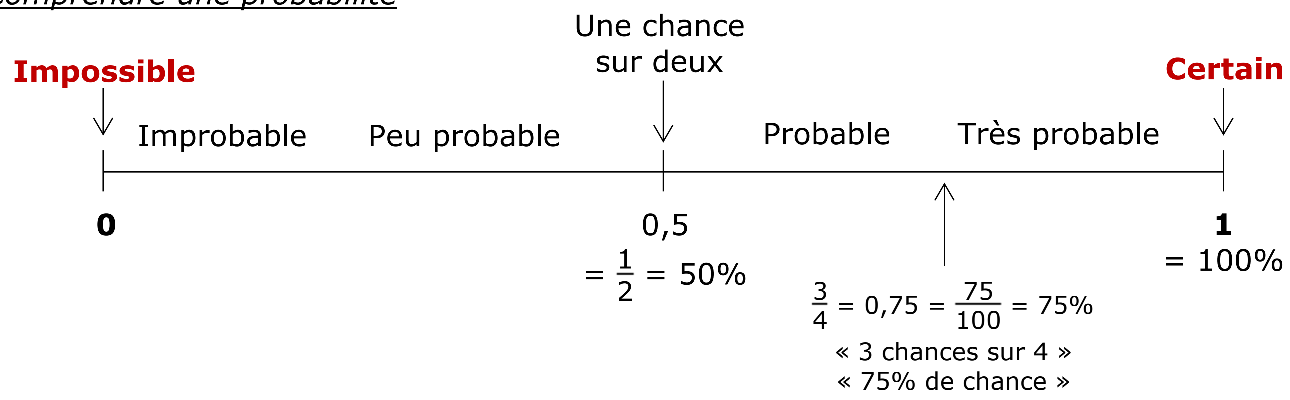
Cet évènement a 4 chances sur 6 de se réaliser.

Sa probabilité est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Propriétés ¤ Une probabilité est un **nombre compris entre 0 et 1**.

¤ La somme des probabilités de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est toujours égale à 1 (ou 100%).

Comprendre une probabilité



Remarque Comme une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, elle peut s'exprimer avec différentes écritures :

- ¤ sous forme d'**une fraction** ;
- ¤ ou sous forme d'une écriture décimale ;
- ¤ ou encore sous forme d'un pourcentage.

Le plus souvent, on utilise l'écriture sous forme d'une fraction qui correspond toujours à une valeur exacte, alors que l'écriture décimale ou en pourcentage est parfois une valeur approchée…

EXERCICE TYPE 1 Tirage de bonbons

Mouad tire un bonbon dans un sac qui contient des bonbons au citron, des bonbons à la fraise, ou des bonbons à la banane.

Dans ce sac, on sait que l'on a 2 chances sur 5 de tirer un bonbon au citron et 16 % de chance de tirer un bonbon à la fraise.

1. Exprimer sous forme décimale la probabilité de tirer un bonbon au citron.

2. Peut-on dire que Mouad a 4 chances sur 25 de tirer un bonbon à la fraise ? Justifier.

3. Quel bonbon Mouad a-t-il le plus de chance de tirer dans ce sac : un bonbon au citron, un bonbon à la fraise, ou un bonbon à la banane ?

Solution

1. La probabilité de tirer un bonbon au citron est : $\frac{2}{5} = \mathbf{0{,}4}$ (= 40 %)

2. La probabilité de tirer un bonbon à la fraise est : $16\ \% = 0{,}16 = \frac{16}{100} = \frac{4}{25}$.

Autrement dit, Mouad a bien 7 chances sur 25 de tirer un bonbon à la fraise.

3. D'après ce qui précède : - La probabilité de tirer un bonbon au citron est : **0,4**.

- La probabilité de tirer un bonbon à la fraise est : **0,16**

Comme la somme des probabilités de toutes les issues est toujours égale à 1, la probabilité de tirer un bonbon à la banane est : $1 - 0{,}4 - 0{,}16 = \mathbf{0{,}44}$.

Comme 0,44 > 0,4 > 0,16, Mouad aura le plus de chance de tirer un bonbon à la banane.

EXERCICE TYPE 2 Une drôle de roue…

On lance la boule, au hasard, sur cette roulette.

On note le numéro de la case sur laquelle la boule s'arrête.

1. Quelle(s) issue(s) a (ont) pour probabilité :

a. $\frac{1}{12}$? **b.** $\frac{1}{3}$? **c.** 25 % **d.** environ 0,167 ?

2. Vérifier que la somme des probabilités des issues est bien égale à 1 ?

Solution

1. Calculons pour chaque issue sa probabilité en cherchant la bonne écriture afin de répondre *à cette question… Si* besoin, utiliser la calculatrice pour les différentes formes possibles.

Issue « 1 » : $\frac{2}{12} = \frac{1}{6} \approx 0{,}167$ (**d.**) Issue « 2 », « 3 » et « 4 » : $\frac{1}{12}$ (**a.**)

Issue « 5 » : $\frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25 = 25\%$ (**c.**) Issue « 6 » : $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ (**b.**)

2. Somme des probabilités de toutes les issues : $\frac{2}{12} + \frac{1}{12} \times 3 + \frac{3}{12} + \frac{4}{12} = \frac{12}{12} \mathbf{= 1}$.

II. Une situation particulière : l'équiprobabilité

Définition Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues ont la même chance de se réaliser, on dit qu'il y a **équiprobabilité**.

Propriété Dans une expérience aléatoire où il y a équiprobabilité, la probabilité d'un évènement est égale à la proportion suivante :

$$\frac{\textbf{Nombre de cas favorables à l'évènement}}{\textbf{Nombre total de cas possibles}}$$

EXERCICE TYPE 3 **Tirer une boule au hasard dans un sac**

Un sac contient 20 boules identiques numérotées de 1 à 20.
On tire une boule au hasard et on regarde son numéro.

Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 6 ?

Solution

Dans ce sac, il y a 20 boules possibles.

Comme elles sont toutes identiques, il y a donc équiprobabilité.

Il y a 3 boules dont le numéro est un multiple de 6 : les boules 6, 12 et 18.

La probabilité d'obtenir un multiple de 6 est donc :

$$\frac{\text{Nombre de boules multiples de 6}}{\text{Nombre total de tirages possibles}} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}} \mathbf{= 0,15 = 15\%}$$

EXERCICE TYPE 4 **Avec un jeu de cartes…**

Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité, en pourcentage, de tirer au hasard une figure (V, D ou R) ?

Solution

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs (carreau, cœur, pique et trèfle) et donc 12 figures possibles (V, D ou R dans chacune des quatre couleurs).

On tire une carte au hasard : il y a donc équiprobabilité entre chaque carte possible.

La probabilité de tirer au hasard une figure dans un jeu de 32 cartes est donc égale à:

$$\frac{\text{Nombre de figures}}{\text{Nombre total de cartes possibles}} = \frac{12}{32} = \frac{3\times 4}{8\times 4} = \frac{3}{8}$$

Transformons cette fraction en pourcentages : $\frac{3}{8} = \frac{?}{100}$

Rappel : $P\ \% = \frac{P}{100}$

Avec le produit en croix, on obtient : $3 \times 100 \div 8 = 12,5$

Il y a 3 chances sur 8 soit encore **12,5 % de chance** de tirer une figure dans un jeu de 32 cartes.

III. *Evènements contraires*

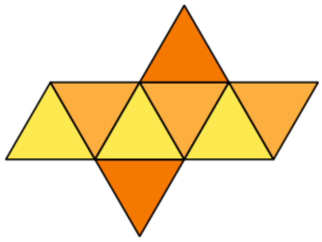
Propriété On note $\overline{C}$ l'évènement **contraire** de C, c'est à dire celui qui se réalise dès que C ne se réalise pas.

La somme d'un évènement et de son contraire est toujours égale à 1 (étant donné qu'il se complète l'un et l'autre, ensemble ils ont 100% de chance de se réaliser…)

On peut alors écrire : $P(C) + P(\overline{C}) = 1$, ou encore $P(C) = 1 - P(\overline{C})$.

EXERCICE TYPE 5 **Un étrange dé octaédrique…**

On construit un dé à 8 faces à l'aide d'un patron avec huit triangles équilatéraux identiques comme ci-contre…
On numérote chaque face de 1 à 8 et on lance ce dé.



Déterminer la probabilité des trois évènements suivants :

1. A : « Le résultat est inférieur ou égal à 2 »
2. B : « Le résultat est strictement supérieur à 3 ».
3. C : « Le résultat est soit inférieur ou égal à 2, soit strictement supérieur à 3 ».

Solution

1. L'évènement A correspond aux faces « 1 ou 2 ».
   On a donc $P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0,25$.
2. L'évènement B correspond aux faces entre 4 et 8.
   On a donc $P(B) = \frac{5}{8} = 0,675$.
3. On remarque que l'évènement C correspond en fait à toutes les issues sauf « 3 ».
   Et il est alors facile de déterminer la probabilité d'obtenir un « 3 »…
   On peut alors écrire : $\mathbf{P(C)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{7}{8}}$.

Remarque Dans l'exercice-type ci-dessus :

C est l'évènement « Obtenir 1, 2, 4, 5, 6, 7 ou 8 ».
$\overline{C}$ est l'évènement « Obtenir 3 ».

On a : $P(C) = \frac{1}{8}$ et $P(\overline{C}) = \frac{7}{8}$

IV. Simuler une expérience aléatoire simple

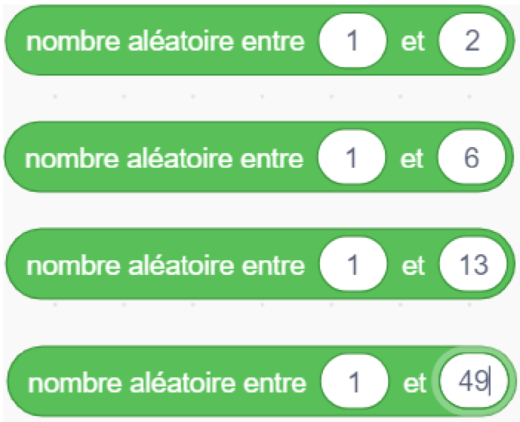
1. Avec Scratch…

Avec le logiciel Scratch, on peut simuler une expérience aléatoire grâce à la commande

(disponible dans le menu « Opérateurs »)

EXERCICE TYPE 6 **Un lancer de dé cubique…**

Relier chacune des commandes Scratch ci-dessous à la (ou les) expérience(s) aléatoire(s) qui peut (peuvent) lui correspondre.



A : On lance au hasard une pièce de monnaie et on observe la face du dessus : Pile ou Face ?

B : On regarde la première boule sortie lors du tirage national du Loto en France.

C : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant autant de boules blanches que de boules noires.

D : On lance un dé non truqué et on observe le numéro de la face du dessus.

E : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant 6 boules blanches et 7 boules noires.

<u>*Solution*</u>

A : On lance au hasard une pièce de monnaie et on observe la face du dessus : Pile ou Face ?

B : On regarde la première boule sortie lors du tirage national du Loto en France.

C : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant autant de boules blanches que de boules noires.

D : On lance un dé non truqué et on observe le numéro de la face du dessus.

E : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant 6 boules blanches et 7 boules noires.

En effet :

L'expérience aléatoire A revient à simuler l'expérience en donnant à 1 la valeur « Pile » et à 2 la valeur « Face ».

Pour l'expérience aléatoire B, il faut savoir que le tirage national du Loto contient 49 boules…

Dans l'expérience aléatoire C, comme il y a autant de boules blanches que de boules noires, on peut simuler cette expérience en donnant à 1 la valeur « Blanche » et à 2 la valeur « Noire ».

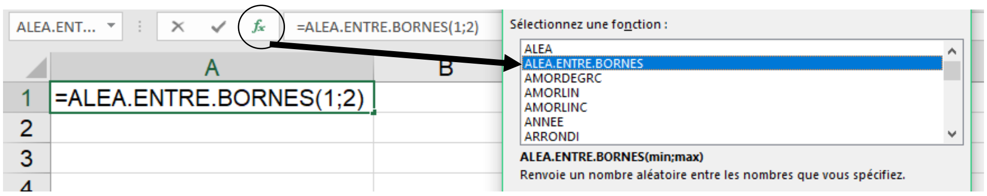
L'expérience aléatoire D revient à simuler l'expérience de 1 à 6 comme les 6 faces d'un dé.

Et enfin, dans l'expérience aléatoire E, il y a 13 boules au total. Il suffit donc de dire, par exemple, que toutes les nombres de 1 à 6 correspondent à une boule jaune, et que les autres de 7 à 13 correspondent à une boule rouge.

2. *Avec un tableur…*

EXERCICE TYPE 7 **Un lancer de pièce : pile ou face !**

Etienne a simulé plusieurs fois des lancers d'une pièce en utilisant la fonction **ALEA.ENTRE.BORNES** d'un tableur.



Pour chaque simulation, il a compté le nombre de « Pile » obtenus :

	Nombre de « Pile »	*Fréquence de « Pile »*
Simulation n°1 : 10 lancers	3	0,3 = 30%
Simulation n°2 : 100 lancers	58	0,58 = 58%
Simulation n°3 : 1 000 lancers	534	0,534 = 53,4%
Simulation n°4 : 10 000 lancers	4 964	0,4964 = 49,64%

Est-il normal qu'il n'ait pas obtenu exactement la moitié de « Pile » à chaque simulation ?

Solution

En théorie, on a une chance sur deux d'obtenir « Pile » : autrement dit, la probabilité d'obtenir « Pile » est $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Mais quand on réalise vraiment l'expérience, c'est le hasard… et les résultats peuvent varier d'une expérience à une autre ! **Les fréquences réelles varient à chaque simulation** et il est donc normal de ne pas obtenir exactement la moitié de « Pile ».

On peut remarquer cependant que **plus l'on effectue de lancers, plus les fréquences réelles se rapprochent de la probabilité théorique**.

Propriété **Si on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire**, la fréquence d'apparition d'une issue devient de plus en plus proche de la probabilité de cette issue.

V. *Modéliser une expérience aléatoire à deux épreuves avec un tableau*

EXERCICE TYPE 8 **Groupes sanguins**

La répartition des groupes sanguins dans la population française est présentée dans le tableau ci-contre.

		Groupe sanguin			
		O	A	B	AB
Rhésus	positif	36 %	38 %	8 %	3 %
	négatif	6 %	7 %	1 %	1 %

On choisit au hasard une personne. Vu le grand nombre que représente la population française, on assimile les probabilités aux fréquences observées (voir paragraphe III).

Quelle est la probabilité des évènements suivants :

1. A : « La personne est du groupe A » ?
2. R+ : « La personne est de rhésus positif » ?
3. A– : « La personne est du groupe A rhésus négatif » ?

Solution

Avant tout calcul de probabilité, il faut d'abord vérifier le total du tableau qui doit être égal à 10% vu qu'il s'agit de pourcentages…
En effet : 36 + 6 + 38 + 7 + 8 + 1+ 3 + 1 = 100 %.

1. L'évènement A correspond à 38 +7 = 45 personnes.
On a donc $P(A) = \frac{45}{100} = \frac{9}{20} = 0{,}45$

2. L'évènement R+ correspond à 36 + 38 + 8 + 3 = 85 personnes.
On a donc $P(R+) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} = 0{,}85$

3. On remarque que l'évènement A– correspond en fait 7 % des personnes.

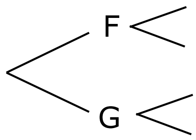
On a donc $P(A-) = \frac{7}{100} = 0{,}07$.

EXERCICE TYPE 9 **Avec un tableau (ou un arbre pour aller plus loin…)**

On suppose qu'à la conception l'embryon a autant de chances d'être un garçon que d'être une fille et on s'intéresse uniquement aux familles ayant exactement deux enfants.

1. Compléter le tableau et l'arbre suivant pour représenter de deux façons différentes toutes les issues possibles.

2e enfant / 1er enfant	Fille	Garçon
Fille		
Garçon		



Familles obtenues

2. Combien y-a-t-il de type de familles possibles ?

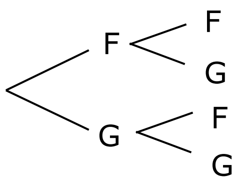
3. **a.** Quelle est la probabilité que cette famille ait une fille et un garçon ?

b. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux filles ?

Solution

1.

2e enfant / 1er enfant	Fille	Garçon
Fille	FF	FG
Garçon	GF	GG



Familles obtenues
FF
FG
GF
GG

2. Il y a 4 types de familles possibles, en prenant en compte l'ordre d'arrivée des enfants : FF, FG, GF ou GG.

3. **a.** La probabilité que cette famille ait une fille et un garçon (FG ou GF) est $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b. La probabilité que cette famille ait deux filles (FF) est $\frac{1}{4}$.

VI. *Pour aller plus loin : modéliser une expérience aléatoire à trois épreuves avec un arbre (hors programme)*

EXERCICE TYPE 10 **Et avec une famille de trois enfants ?…**

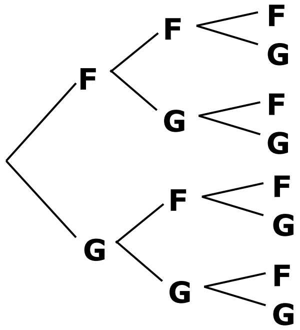
On suppose qu'à la conception l'embryon a autant de chances d'être un garçon que d'être une fille et on s'intéresse uniquement aux familles ayant exactement trois enfants.

Déterminer la probabilité des évènements A, B et C suivants :

A : « La 2ème naissance est une fille. »
B : « Il y a deux garçons. »
C : « Il y a au moins une fille. »

Solution

Modélisons la situation à l'aide d'un arbre dit « arbre de probabilités » qui permet de déterminer toutes les « issues » possibles.



Familles obtenues			
FFF	**A**		**C**
FFG	**A**		**C**
FGF			**C**
FGG		**B**	**C**
GFF	**A**		**C**
GFG	**A**	**B**	**C**
GGF		**B**	**C**
GGG			

Grâce à ce tableau, on obtient :

¤ $P(\mathbf{A}) = \dfrac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}} = \dfrac{\mathbf{4}}{8} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

¤ $P(\mathbf{B}) = \dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}}$

¤ $P(\mathbf{C}) = \dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{8}}$