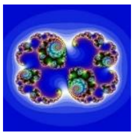
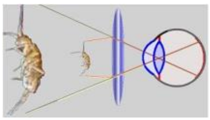
Séquence n°12
TRANSFORMER DES FIGURES : SYMETRIES, TRANSLATION, ROTATION et HOMOTHETIES

__Préliminaire__ (exposé oral d'introduction)

Dans la nature, en arts plastiques, en architecture, en sciences de la vie et de la terre, en optique, etc., on utilise régulièrement des transformations de figures…
Voici quelques exemples originaux :


Papillon
(symétrie axiale)


Fractale
(symétrie centrale)


Loupe
(agrandissement)

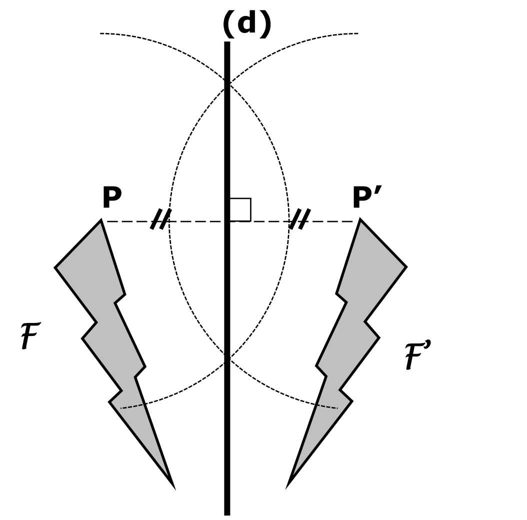
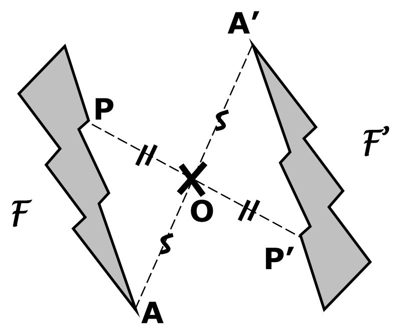

Œuvre d'Escher
(translation)

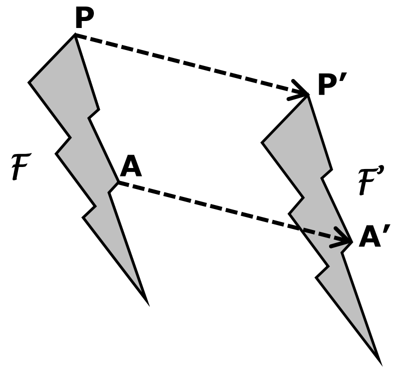
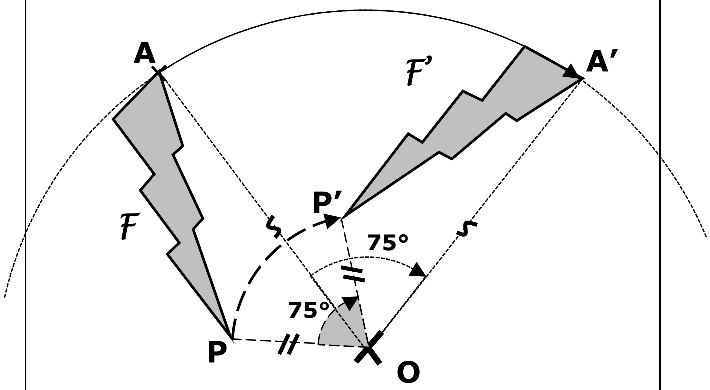

Miroir cylindrique
(anamorphose)

I. *Symétries, translation et rotation : des transformations qui conservent les longueurs…*

__Propriété__ Pour chacune des transformations de ce paragraphe (symétries axiale ou centrale, translation ou rotation), **la figure $\mathcal{F}$ et sa figure image $\mathcal{F}'$ sont superposables** (on dit aussi qu'elles sont « égales » comme les triangles égaux…).

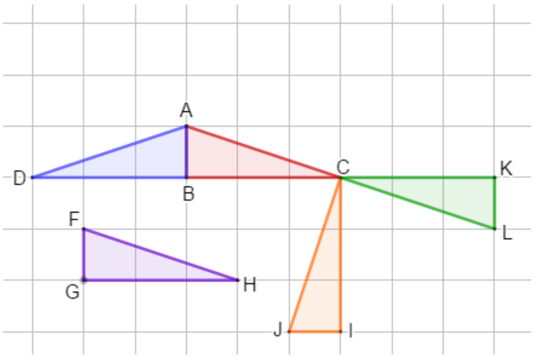
On dit que ces **transformations conservent les longueurs, la mesure des angles** (y compris les angles droits), **les aires, le parallélisme et l'alignement**.

	Symétrie axiale	**Symétrie centrale**
Principe	**Plier** le long d'une **droite** (miroir)	Effectuer un **demi-tour** autour d'un **point**
Vocabulaire	P' est le **symétrique** du point P **par rapport à la droite (d)**. La droite **(d)** est l'**axe** de symétrie.	P' est le **symétrique** du point P **par rapport au point O** Le point **O** est le **centre** de symétrie.
Figure		
Notion clé	L'axe de symétrie **(d)** est la **médiatrice** de tous les segments qui relient un point **P** et son symétrique **P'**.	Le centre de symétrie **O** est le **milieu** de tous les segments qui relient un point **P** et son symétrique **P'**.

	Translation	**Rotation**
Principe	**Glisser** selon une **direction,** un **sens** et une **longueur donnée**. (« un déplacement sans tourner »)	**Tourner** d'un **angle donné** autour d'un **point**.
Vocabulaire	P' est l'**image** du point P par la translation qui transforme le point A en A'.	P' est l'**image** du point P par la rotation de **centre O** et d'**angle** 75° dans le **sens** des aiguilles d'une montre. On appelle **sens direct** le **sens inverse** des aiguilles d'une montre.
Figure		
Notion clé	Le quadrilatère PP'A'A est un **parallélogramme**.	Le triangle POP' est **isocèle en O** tel que l'angle $\widehat{POP'}$ mesure 75°.

EXERCICE TYPE 1 EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR UNE FIGURE

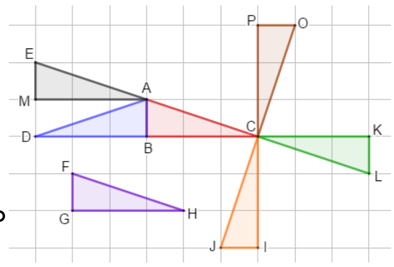
La figure ci-contre est constituée de cinq triangles rectangles égaux obtenus à l'aide du logiciel Geogebra.



1. Décrire la transformation qui permet de passer :
   - **a.** du triangle rouge ABC au triangle bleu ADB ?
   - **b.** du triangle rouge ABC au triangle violet FGH ?
   - **c.** du triangle rouge ABC au triangle orange CIJ ?
   - **d.** du triangle rouge ABC au triangle vert CKL ?
2. Sur cette figure, construire la figure obtenue si :
   - **a.** on transforme le triangle rouge ABC par une translation qui transforme C en A.
   - **b.** on transforme le triangle rouge ABC par une rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Solution

1. **a.** La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle bleu ADB est la **symétrie d'axe (AB)**.
   - **b.** La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle violet FGH est la **translation qui transforme le point A en F.**
   - **c.** La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle orange CIJ est la **rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens direct** (autrement dit, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).
   - **d.** La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle vert CKL est la **symétrie centrale de centre C**.
2. Sur la figure ci-contre, on obtient :
   - **a. le triangle AME** par la translation qui transforme C en A.
   - **b. le triangle POC** par la rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (sens indirect).



EXERCICE TYPE 2 **EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR LES GRANDEURS**

Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.
Le motif pied-de-coq est représenté par le polygone représenté sur la figure 2, réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

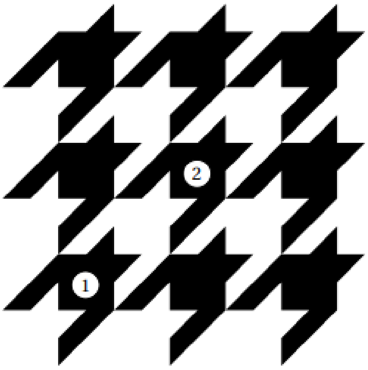


Figure 1

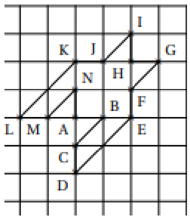


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?
2. Dans cette question, on considère que : AB = 1 cm (figure 2).
   a. Montrer que l'aire du motif pied-de-coq de la figure 2 est 8 cm².
   b. Déterminer l'aire de tout le pavage. Justifier.

Solution

1. La transformation géométrique qui permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 est une translation.
2. **a.** Le motif comprend 4 carrés du quadrillage et 8 triangles rectangles comme FGH.
   Comme AB = 1 cm, chaque carré du quadrillage a une aire de 1 cm².
   De même, chaque triangle rectangle est en fait un demi-carré d'aire 0,5 cm².
   L'aire d'un motif est donc $4 \times 1 + 8 \times 0,5 = 8$ cm².
   b. Le pavage est constitué de 9 motifs obtenus par translation…
   D'après la leçon, une translation transforme une figure en une figure superposable et donc de même aire…
   Donc chaque motif a une aire 8 cm².
   Et l'aire du pavage est donc $9 \times 8 = 72$ cm².

II. L'homothétie : une transformation quia grandit ou réduit…

1. Agrandissement et réduction (rappel)

Définition **Agrandir** ou **réduire** une figure, c'est construire une figure de **même forme** en **multipliant les longueurs** de la figure initiale par un nombre k strictement positif.

Définition (rappel de 5e et 4e)

Le **rapport** *k* d'agrandissement ou de réduction est aussi appelé **échelle**.

$$k = \frac{\text{longueur } \textbf{obtenue après} \text{ l'agrandissement ou la réduction}}{\text{longueur sur la } \textbf{figure initiale}}$$

On dit que k est **le rapport** d'agrandissement ou de réduction.

- Si $k > 1$, il s'agit d'un **agrandissement**.
- Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une **réduction**.
- Si $k = 1$, il s'agit d'une reproduction.

2. Effets sur les longueurs et les angles

Propriétés Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :
- les longueurs sont toutes multipliées par k ;
- les mesures des angles sont conservées.

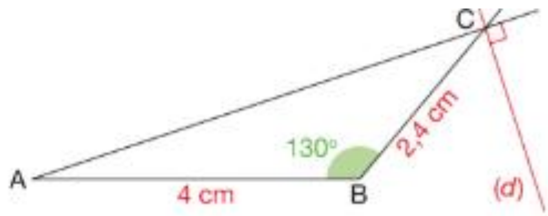
EXERCICE TYPE 3 **EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR LES LONGUEURS ET ANGLES**

ABC est un triangle tel que :

$AB = 4$ cm, $BC = 2{,}4$ cm et $\widehat{ABC} = 130°$.

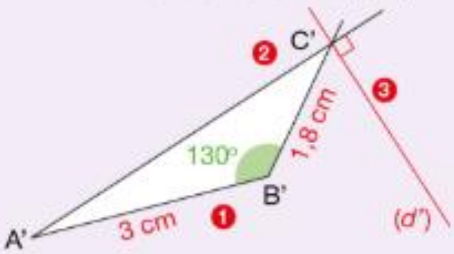
(d) est la droite perpendiculaire en C à la droite (AC).

Construire une réduction de cette figure de façon que le côté [A'B'] correspondant à [AB] mesure 3 cm.



Solution

- On calcule le rapport k de réduction.
$A'B' = k \times AB$, c'est-à-dire $3 = 4 \times k$.
Donc $k = \frac{3}{4} = 0{,}75$.
- On calcule la longueur B'C'.
$B'C' = k \times BC$, c'est-à-dire $B'C' = 0{,}75 \times 2{,}4 = 1{,}8$.
Donc $B'C' = 1{,}8$ cm.
- Dans une réduction, les mesures des angles sont conservées donc :
– $\widehat{A'B'C'} = 130°$,
– les droites (A'C') et (d') sont perpendiculaires.



Conseils

$k = \frac{\text{longueur obtenue}}{\text{longueur initiale}}$

On construit dans cet ordre :
1. le segment [A'B'] de longueur 3 cm ;
2. le point C' tel que $\widehat{A'B'C'} = 130°$ et B'C' = 1,8 cm ;
3. la droite (d') perpendiculaire à la droite (A'C') en C' (car une réduction conserve la perpendicularité).

3. Une nouvelle transformation : l'homothétie

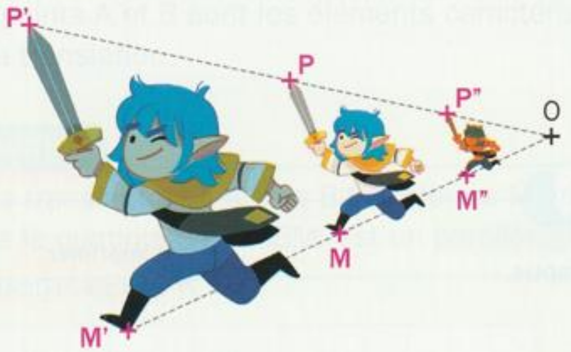
__Définition__ L'image d'une figure par l'**homothétie de centre O et de rapport *k*** (≠0) s'obtient par un « **rapprochement/réduction** » ou un « **éloignement/agrandissement** » à partir d'un point **O** et de facteur ***k***.

EXEMPLES

$k > 0$

$k > 1$ L'homothétie de centre O et de rapport 2 transforme le point M en M' :
- OM' = 2 × OM ;
- O, M et M' sont alignés dans cet ordre.

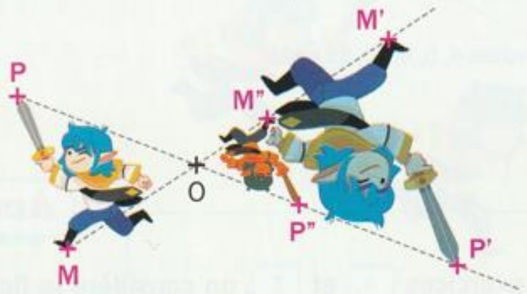
$k < 1$ L'homothétie de centre O et de rapport 0,4 transforme le point M en M" :
- OM" = 0,4 × OM ;
- O, M" et M sont alignés dans cet ordre.



$k < 0$

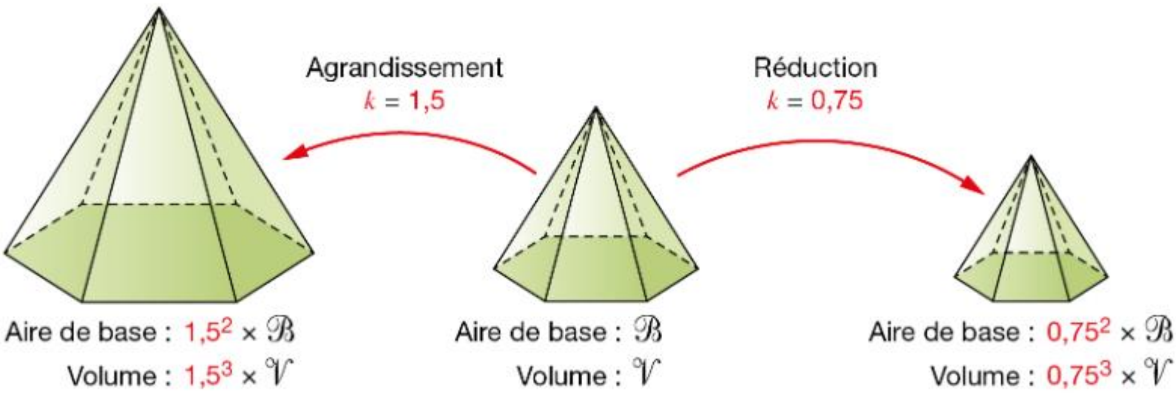
$k < -1$ L'homothétie de centre O et de rapport –1,5 transforme le point M en M' :
- OM' = 1,5 × OM ;
- M, O et M' sont alignés dans cet ordre.

$k > -1$ L'homothétie de centre O et de rapport –0,6 transforme le point M en M" :
- OM" = 0,6 × OM ;
- M, O et M" sont alignés dans cet ordre.



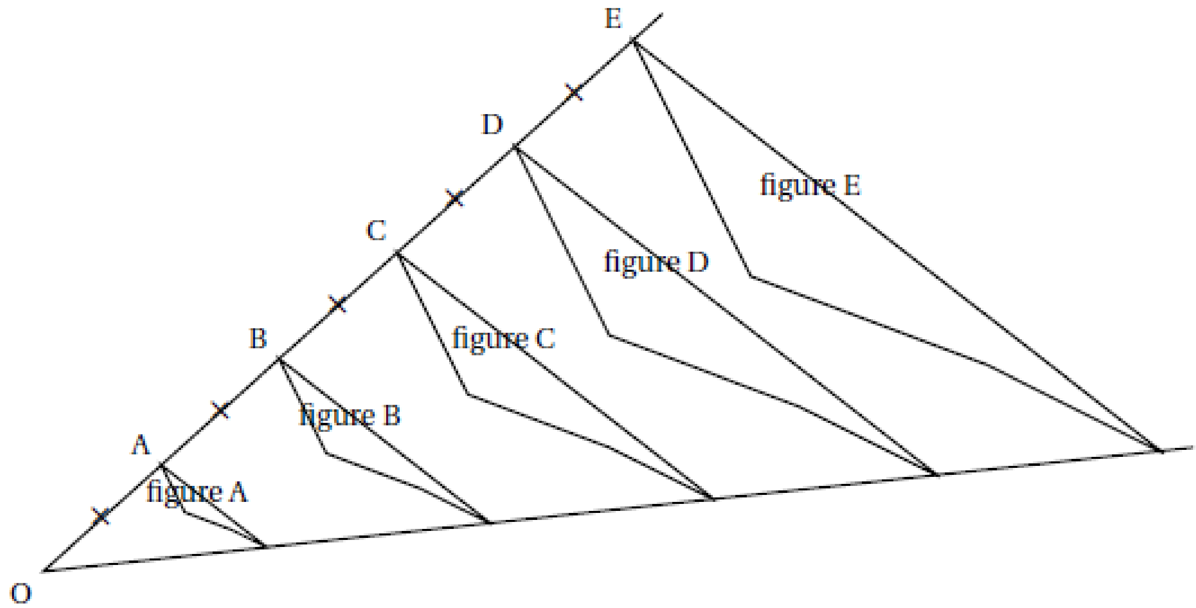
4. Effets sur les aires et les volumes

Propriétés Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :
- l'aire d'une surface est multipliée par k^2 ;
- le volume d'un solide est multiplié par k^3.



EXERCICE TYPE 4 **EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR LES AIRES ET VOLUMES**

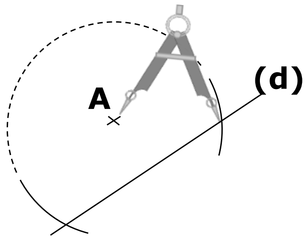
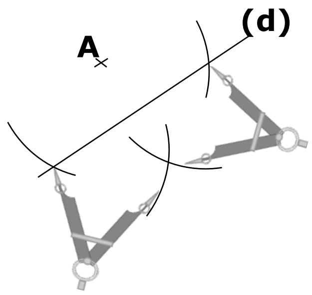
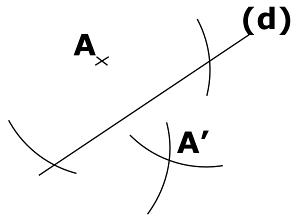
Avec un logiciel de géométrie dynamique, on a construit la figure A. En appliquant à la figure A des homothéties de centre O et de rapports différents, on a ensuite obtenu les autres figures.



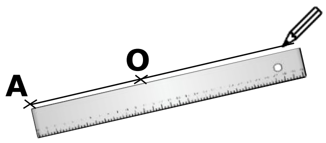
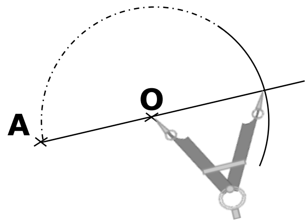
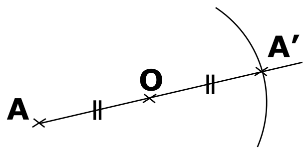
1. Quel est le rapport de l'homothétie de centre O qui permet d'obtenir la figure C à partir de la figure A ? Aucune justification n'est attendue.
2. On applique l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{3}{5}$ à la figure E. Quelle figure obtient-on ? *Aucune justification n'est attendue.*
3. Quelle figure a une aire quatre fois plus grande que celle de la figure A ?

III. Constructions au compas pour les symétries, translation et rotation

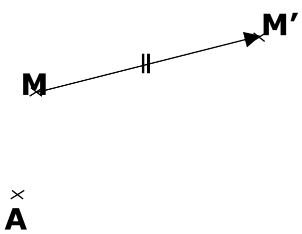
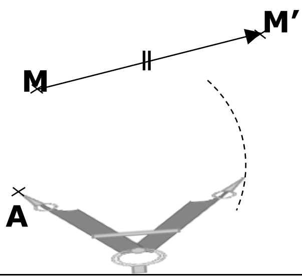
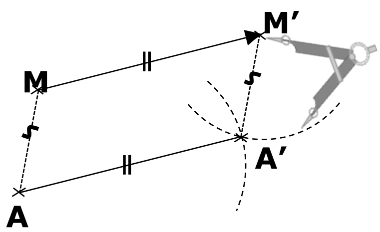
Symétrie axiale

Exemple : Construire le point A' tel que les points A et A' soient symétriques **par rapport à (d)**.		
		
Avec Le compas, on place deux points sur la droite (**d**).	**Sans changer l'écartement** du compas, on trace deux arcs de cercle de l'autre côté de l'axe.	On place le point A' à l'**intersection** des deux arcs de cercle.
On laisse tous les **traits de construction visibles**.		

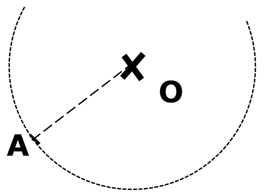
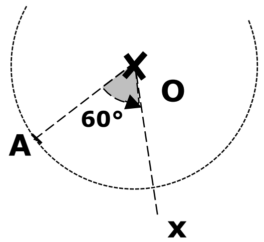
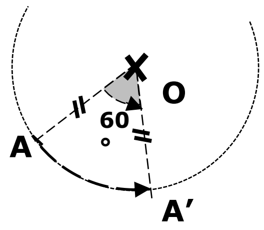
Symétrie centrale

Exemple : Construire le point A' tel que les points A et A' soient symétriques **par rapport à O**.		
		
Avec la règle (sans utiliser les graduations), on trace la **demi-droite** [AO).	**Avec le compas,** on **reporte** à partir du point O la longueur AO sur la demi-droite [AO).	On place le point A' à l'**intersection** de la demi-droite et de l'arc de cercle.
On **code** la figure et on laisse tous les **traits de construction visibles**.		

Translation

Exemple : Construire le point A' image du point A par la **translation qui transforme M en M'**.		
		
On cherche à vue d'œil où doit être le point A' pour que le AMM'A' soit un parallélogramme. *(figure à main levée…)*	**Avec le compas,** on **reporte** la longueur MM' à partir du point A.	On **reporte** la longueur AM à partir du point M' et on place le point A' à l'**intersection** de deux arcs de cercle…
On **code** la figure et on laisse tous les **traits de construction visibles**.		

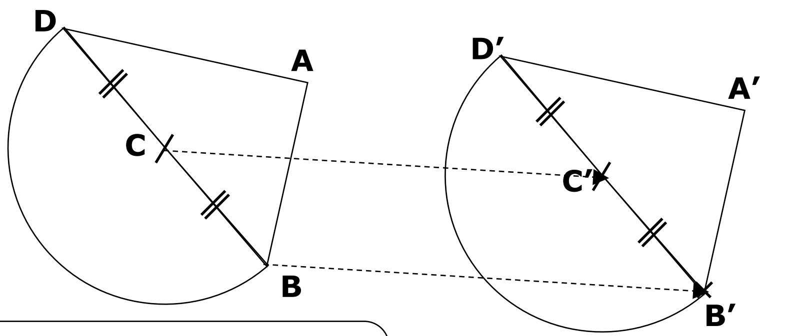
Rotation

Exemple : Construire le point A′ image du point A par la **rotation** de **centre O** et d'**angle 60°** dans le **sens direct.**		
		
Avec le compas, on construit un **arc de cercle** de centre O et de rayon OA.	A vue d'œil, on s'assure du **sens** de la rotation. On construit l'angle $\widehat{AOx}$ de 60° dans le sens donné…	On place l point A′ à l'**intersection** de la demi-droite et de l'arc de cercle…
On **code** la figure et on laisse tous les **traits de construction visibles**.		

EXERCICE TYPE 4

Dans chaque cas, construire précisément avec les outils de géométrie la figure image par la transformation indiquée.

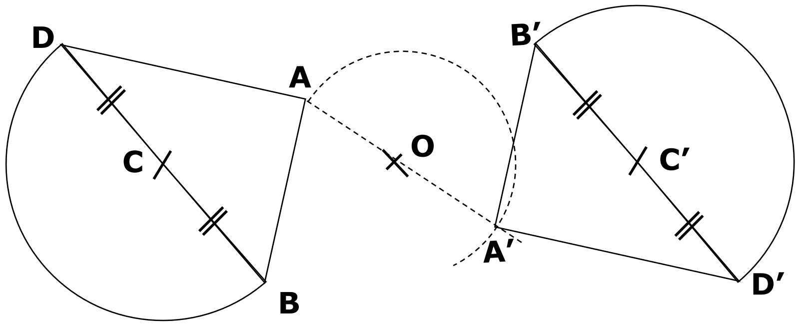
1. Translation « de B vers B′ »



Par exemple, pour construire l'image du point C′, on construit au compas le parallélogramme B′BCC′…

Et on construit de même A′ et D′.

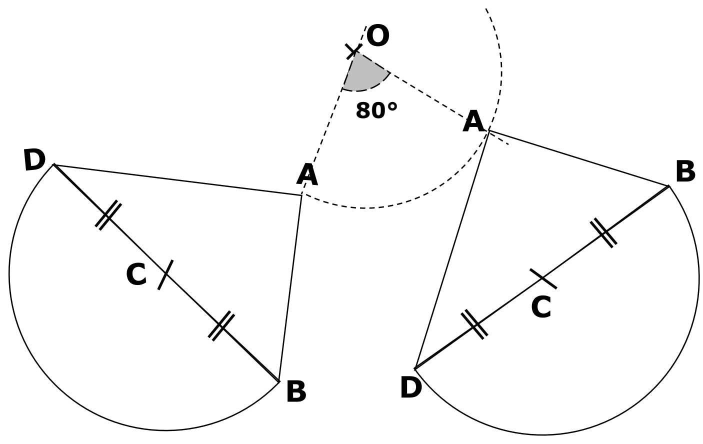
2. Symétrie centrale de centre O



Par exemple, pour construire l'image du point A′, on construit la demi-droite [AO) et le demi-cercle de centre O passant par A…

Et on construit de même B′, C′ et D′.

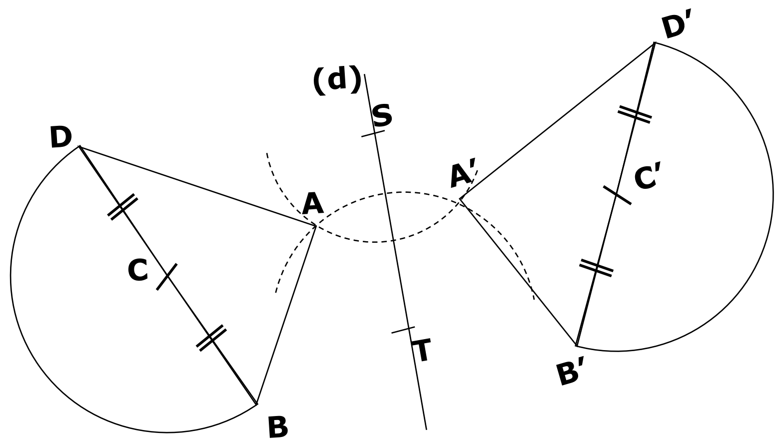
3. Rotation de centre O et d'angle 80° dans le sens direct



Par exemple, pour construire l'image du point A', on construit l'angle de côté [AO] et d'angle 80° dans le sens direct, et le cercle de centre O…

Et on construit de même B', C' et D'.

4. Symétrie axiale d'axe (d)



Par exemple, pour construire l'image du point A', on choisit deux points S et T sur l'axe (d) et on reporte au compas les longueurs SA et TA de l'autre côté de l'axe…

Et on construit de même B', C' et D'.