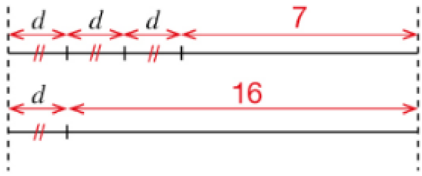
Séquence n°11

RESOUDRE UN PROBLEME PAR UNE EQUATION

I. *Modéliser un problème à l'aide d'une équation*

EXERCICE TYPE 1 **Modéliser un problème par une équation**

Léna a fait trois tours du lac de la Cavayère, en VTT, puis a parcouru 7 km dans la forêt. Manoli n'a fait qu'un seul tour du lac, mais a d'abord effectué un grand parcours de 16 km. A leur arrivée au parking, ils constatent qu'ils ont parcouru la même distance totale.
Voici un schéma qui représente la situation.



1. Que représente l'inconnue d sur ce schéma ?

2. Laquelle des propositions suivantes permet de modéliser ce problème ?
a. $4d = 23$ ***b.*** $3d + 7 = d + 16$ ***c.*** $3d - d = 7 - 16$ ***d.*** $3d + 7 > d + 16$

3. Que signifierait la proposition ***d.*** dans le contexte de ce problème ?

Solution

1. L'inconnue d représente la distance parcourue pour un tour du lac de la Cavayère.

2. Léna a parcouru une distance de $3d$ km lors des trois tours du lac de la Cavayère, puis 7 km dans la forêt, soit un total de $3d + 7$ km.
Pendant ce temps, Manoli a parcouru $d + 16$ km.
Comme ils ont parcouru la même distance totale, on a l'équation : $3d + 7 = d + 16$ (réponse ***b***).

3. La proposition ***d.*** ci-dessus s'appelle une **inéquation** : cette inéquation signifierait que Léna a parcouru plus de distance totale que Manoli…

On peut modéliser certains problèmes à l'aide d'une **équation***, c'est-à-dire à l'aide d'une* égalité dans laquelle intervient un nombre de valeur **inconnue***, désigné par une lettre, et dont on aimerait connaître la valeur…*

Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres (voir séquence « expressions littérales ») : une valeur de l'inconnue pour laquelle **l'égalité est vraie** est appelée **solution** de l'équation.

Résoudre une équation *d'inconnue x,* c'est **trouver toutes les solutions** de cette équation *: autrement dit, c'est trouver par quel(s) nombre(s) il faut remplacer l'inconnue x pour que l'égalité soit vraie.*

II. *Résoudre une équation de la forme $ax + b = cx + d$*

<u>*Méthode*</u> Pour résoudre une équation, on la transforme par étapes pour obtenir une équation de la forme "x = a" où a est le nombre cherché : la solution.

<u>*Règles*</u>

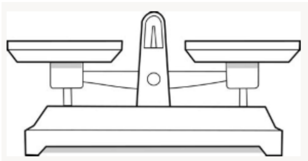
On conserve une égalité lorsque :
- On ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres de l'égalité ;
- On multiplie ou divise par un même nombre (différent de 0) les deux membres de l'égalité.

<u>*Pour mieux comprendre…*</u>

Si **A**, **B** et **k** désignent des nombres (**k** ≠ 0), alors les égalités suivantes ont les mêmes solutions.

« Autrement dit, une équation est comme une balance… Pour que l'équilibre reste le même à chaque étape, il faut effectuer la même transformation des deux côtés de l'égalité… »

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{A} & = & \mathbf{B} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A + k} & = & \mathbf{B + k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A - k} & = & \mathbf{B - k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A \times k} & = & \mathbf{B \times k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A \div k} & = & \mathbf{B \div k} \end{array}$$



« Egalité = équilibre »

EXERCICE TYPE 2 ***Equation de la forme $ax + b = cx + d$***

Résoudre l'équation $7x - 1 = 3x + 5$.

<u>*Solution*</u> $7x - 1 = 3x + 5$

☞ Pour « regrouper les x » dans un même membre, on soustrait $3x$ à chaque membre de l'égalité : $7x - 1 \mathbf{- 3x} = 3x + 5 \mathbf{- 3x}$

On réduit : $4x - 1 = \mathbf{5}$

☞ Pour « isoler le terme en x », on ajoute 1 à chaque membre de l'égalité : $4x - 1 \mathbf{+ 1} = 5 \mathbf{+ 1}$

On réduit : $4x = 6$

☞ Pour trouver la valeur de x, on divise par 4 chaque membre de l'égalité : $4x \mathbf{\div 4} = 6 \mathbf{\div 4}$

On réduit : $x = \mathbf{\frac{6}{4}} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

<u>*Vérification*</u> : Avant de conclure, on teste l'égalité avec la calculatrice.

$7\times\mathbf{\frac{3}{2}} - 1 = \mathbf{9{,}5}$ et $3\times\mathbf{\frac{3}{2}} + 5 = \mathbf{9{,}5}$ donc l'égalité est bien vraie pour $x = \mathbf{\frac{3}{2}}$.

<u>*Conclusion*</u> : L'équation $3x + 1 = 7x - 2$ a une solution : $\mathbf{x = \frac{3}{4} = 0{,}75}$

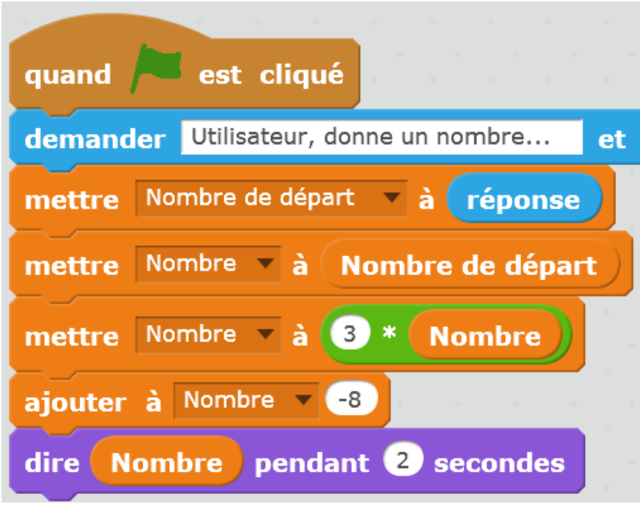
III. *Mettre en équation un problème pour le résoudre*

Méthode Pour modéliser une situation où l'on cherche un nombre inconnu,
on peut **mettre en équation** le problème :

- ***Choix de l'inconnue*** : on choisit l'inconnue en fonction de ce que l'on cherche.
- ***Traduction de l'énoncé*** : on traduit les données de l'énoncé en une équation.
- ***Résolution de l'équation*** : on résout l'équation (cf. paragraphe précédent).
- ***Vérification*** : on teste la solution dans le problème pour vérifier…
- ***Conclusion*** : on interprète la solution pour répondre au problème.

EXERCICE TYPE 3

On considère le programme de calcul présenté ci-contre sur Scratch.



x
$3x$
$3x-8$

Quel est le nombre donné initialement par l'utilisateur si, à la fin du programme, le lutin affiche « −65 » ?

Solution

- *Choix de l'inconnue* : Notons x le nombre donné initialement par l'utilisateur.
- *Traduction de l'énoncé* : Le problème proposé revient à trouver le nombre x tel que :

$$3x - 8 = -65$$

- *Résolution de l'équation* :

$$\begin{aligned} 3x - 8 &= -65 \\ 3x - 8 \mathbf{+ 8} &= -65 \mathbf{+ 8} \\ 3x &= -57 \\ 3x \mathbf{\div 3} &= -57 \mathbf{\div 3} \\ x &= \mathbf{-19} \end{aligned}$$

- *Vérification* : $3\times(-19) - 8 = -57 - 8 = -65$
- *Conclusion* : Pour que le lutin affiche « −65 », le nombre donné initialement par l'utilisateur doit être **−19**.