Séquence n°10

RESOUDRE DES PROBLEMES AVEC DES PUISSANCES

I. Puissances entières d'un nombre relatif

Dans tout ce paragraphe, **a** désigne un nombre relatif et **n** un nombre entier positif non nul.

1. Puissances positives (rappel)

Définition (rappel) On note $\mathbf{a^n}$ le produit de **n** facteurs tous égaux à **a** : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

On dit « **a** puissance **n** » ou « **a** exposant **n** ».

Cas particuliers
- ¤ Si **a** = 0 : $0^n = 0$.
- ¤ Pour tout nombre **a** ≠ 0 :
  - $a^0 = 1$; $a^2 = a \times a$ « **a** au carré »
  - $a^1 = a$; $a^3 = a \times a \times a$ « **a** au cube »

• Longueurs : en **m**
• Aires : en $\mathbf{m^2}$
• Volumes : en $\mathbf{m^3}$

Exemples $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$; $(-3)^4 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = 81$

2. Puissances négatives

Définition On note $\mathbf{a^{-n}}$ l'inverse de $\mathbf{a^n}$, c'est-à-dire : $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} = \dfrac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$

Exemples $2^{-3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{2\times2\times2} = \dfrac{1}{8}$; $(-1)^{-3} = \dfrac{1}{(-1)^3} = \dfrac{1}{(-1)\times(-1)\times(-1)} = \dfrac{1}{-1} = -1$

Remarque D'après les exemples ci-dessus, $\mathbf{a^{-n}}$ peut être positif ou négatif !

3. Organiser un calcul avec les puissances

Règle de priorités dans les calculs *(voir fiche n°1)*

Dans un calcul sans parenthèses avec des puissances, **on effectue les puissances avant** d'appliquer les autres règles de priorité.

EXERCICE TYPE 1

Calculer et donner une valeur exacte sous forme fractionnaire ou décimale :

$A = (-4)^2$; $B = -4^2$; $C = 10^{-3}$; $D = (-5)^{-4}$;

$E = \dfrac{1}{3} - 3^{-2}$; $F = \dfrac{14^3}{7^3}$; $G = 3^2 \times 2^3$; $H = (-2)^4 + 7 \times 3^2$

Solution :

$A = (-4)^2 = (-4)\times(-4) = +16$; $B = -4^2 = -(4^2) = -16$

$(-4)^2 \neq -4^2$ (signe contraire…)

$C = 10^{-3} = \dfrac{1}{10^3} = \dfrac{1}{1\,000} = 0{,}001$; $D = (-5)^{-4} = \dfrac{1}{(-5)^4} = \dfrac{1}{(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)} = \dfrac{1}{625}$

$E = \dfrac{1}{3} - 3^{-2} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{9}$; $F = \dfrac{14^3}{7^3} = \left(\dfrac{14}{7}\right)^3 = 2^3 = 8$

$G = 3^2\times2^3 = 9 \times 8 = 72$; $E = (-2)^4 + 7 \times 3^2 = 16 + 7 \times 9 = 16 + 63 = 79$

4. Règles de calcul sur les puissances

EXERCICE TYPE 2

Sans calculatrice et en utilisant la définition des puissances, écrire sous la forme d'une puissance du type $\mathbf{a^k}$ les expressions suivantes :

$I = \mathbf{9^3} \times \mathbf{9^2}$; $J = \dfrac{\mathbf{7^6}}{\mathbf{7^4}}$; $K = (\mathbf{5^4})^\mathbf{3}$; $L = \mathbf{10^3} \times \mathbf{10^{-5}}$; $M = \mathbf{2^3 \times 5^3}$

Solution : $I = \mathbf{9^3} \times \mathbf{9^2} = 9\times9\times9 \times 9\times9 = \mathbf{9^5}$ $J = \dfrac{\mathbf{7^6}}{\mathbf{7^4}} = \dfrac{7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7} = \mathbf{7^2}$

$K = (\mathbf{5^4})^\mathbf{3} = (5\times5\times5\times5)^3 = (5\times5\times5\times5) \times (5\times5\times5\times5) \times (5\times5\times5\times5) = \mathbf{5^{12}}$

$L = \mathbf{10^3} \times \mathbf{10^{-5}} = \dfrac{10^3}{10^5} = \dfrac{10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10} = \dfrac{1}{10^2} = \mathbf{10^{-2}}$

$M = \mathbf{2^3 \times 5^3} = 2\times2\times2 \times 5\times5\times5 = (2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5) = (2\times5)^3 = \mathbf{10^3}$

Remarque *(Pour aller plus loin)*

A partir des définitions de la puissance d'un nombre, on peut généraliser avec des lettres et mémoriser les propriétés suivantes :

Si **a** et **b** désignent des nombres différents de 0, et **n** et **p** désignent des entiers relatifs, alors :

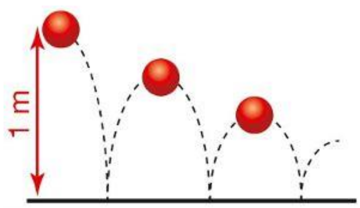
$$\mathbf{a^n \times a^p = a^{n+p}} \quad ; \quad \mathbf{\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}} \quad ; \quad \mathbf{(a^n)^p = a^{n\times p}} \quad ; \quad \mathbf{(a\times b)^n = a^n \times b^n}$$

EXERCICE TYPE 3

On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 m. A chaque rebond, elle rebondit au trois-quarts de la hauteur d'où elle est tombée.

Quelle hauteur la balle atteint-elle au 3e rebond ? au 7e rebond ?

Donner une valeur arrondie au cm près.



Solution :

Au bout du 1er rebond, la hauteur de la balle sera de $1\times\frac{3}{4}$ m.

Au bout du 2e rebond, la hauteur de la balle sera de $1\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$ m.

Au bout du 3e rebond, la hauteur de la balle sera de $1\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{3}{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^3$ m ≈ **0,42 m**.

En fait, à chaque rebond, on multiplie la hauteur précédente par $\frac{3}{4}$.

Au bout du 7e rebond, la hauteur de la balle sera donc de $1\times\left(\frac{3}{4}\right)^7$ m ≈ **0,13 m**.

II. *Puissances* de 10 et écritures scientifiques

Dans tout ce paragraphe, **n** désigne un nombre entier positif non nul.

1. *Puissances de 10 et écritures décimales*

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = 1\,\underbrace{000 \ldots 00}_{n \text{ zéros}} \quad ; \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}000 \ldots 001}_{n \text{ zéros}}$$

Préfixes scientifiques

Préfixe	giga	méga	kilo	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	c	m	μ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Ecritures décimales	*1 000 000 000*	*1 000 000*	*1 000*	*0,01*	*0,001*	*0,000 001*	*0,000 000 001*

De l'infiniment petit à l'infiniment grand…

Cliquez sur la vidéo ci-contre « Sciences et Avenir »…
En cas de difficulté, utilisez le lien suivant :
https://youtu.be/PLhuZEosRRw

2. *Ecriture scientifique d'un nombre*

Définition L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal positif est l'écriture de la forme
a × **10ⁿ** où **a** est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu),
n est un entier relatif.

Remarque La notation scientifique est utile pour donner un **ordre de grandeur** ou un **encadrement** du résultat d'un calcul, et donc pour comparer les nombres.

EXERCICE TYPE 4 Compléter le tableau suivant :

	Données	*Ecriture décimale*	*Ecriture scientifique*
Rayon de la Terre (au niveau de l'équateur)	6 378 km	m	m
Virus de la grippe	90 nm	0,000000090 m	9×10^{-8} m
Mémoire / clé USB	2 Go	2 000 000 000 octets	2×10^9 octets
Particules dans l'air…	360 µg	0,000 360 g	$3{,}6 \times 10^{-4}$ g
Distance Terre-Soleil	150×10^6 km	150 000 000 000 m	$1{,}5\times10^{11}$ m
Valeur en € d'un CFP (CFP = franc pacifique)	838×10^{-5} €	0,00838 €	$8{,}38 \times 10^{-2}$ €

EXERCICE TYPE 5

Il y a environ 2×10^{15} atomes de cuivre dans 211 ng de cuivre.

Quelle est environ la masse (en g) d'un atome de cuivre ?

Solution

Commençons par convertir 211 ng en grammes.
On rappelle que $1 \text{ ng} = 10^{-9}$, donc $211 \text{ ng} = 211 \times 10^{-9}$ g.

Pour connaître la masse d'un atome, il faut diviser la masse de cuivre par le nombre d'atomes, soit : $\dfrac{211 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{15}} = \mathbf{1{,}055 \times 10^{-22}}$ **g.**

III. Grandeur produit

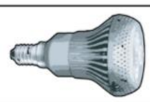
La masse (g), la longueur (m), l'intensité (A), la tension (V), le temps (h), etc. sont des grandeurs simples bien connues…
Une **grandeur produit** provient du produit de grandeurs simples : **son unité doit être écrite en cohérence avec les unités utilisées**.

Exemples

Volume •	• 52 MWh
Energie électrique •	• 32 cm²
Aire •	• 45 m³

EXERCICE TYPE 6

On étudie de type d'ampoules qui fournissent un éclairage semblable.

		
Type d'ampoule	halogène	LED
Puissance électrique en W (watts)	75	10
Prix d'achat en €	2,25	16,50
Durée de vie en h (heures)	2 000	30 000

1. Quelle quantité d'énergie électrique consomme chacune de ces ampoules en un an si on les laisse allumées 2 h par jour en moyenne ?
2. Le coût du kWh est 0,16 €.
   Quelle économie annuelle réalise-t-on avec une ampoule LED ?
3. Combien d'ampoules halogènes aura-t-on achetées lorsque l'ampoule LED sera à son tour à changer ? Quelle économie réalise-t-on ?

Solution

1. Sur une année (365 jours), on laisse ces ampoules allumées pendant $2 \times 365 = 730$ h.
   La quantité d'énergie électrique consommée est donc :
   - pour une ampoule halogène : $75 \times 730 = 54\,750$ Wh = **54,75 kWh**.
   - pour une LED : $10 \times 730 = 7\,300$ Wh = **7,3 kWh**.
2. Si le coût du kWh est 0,16 €, alors l'économie annuelle réalisée une ampoule LED sera :
   $(54{,}75 - 7{,}3) \times 0{,}16 = 7{,}592$ €.

   (Attention, c'est l'économie réalisée sur une seule ampoule…)
3. $30\,000 \div 2\,000 = 15$.
   Il faudra donc 15 ampoules halogènes achetées pour une seule ampoule LED changée.
   L'économie sera alors de : $15 \times 2{,}25 - 16{,}50 =$ **17,25 €**.