Séquence n°9

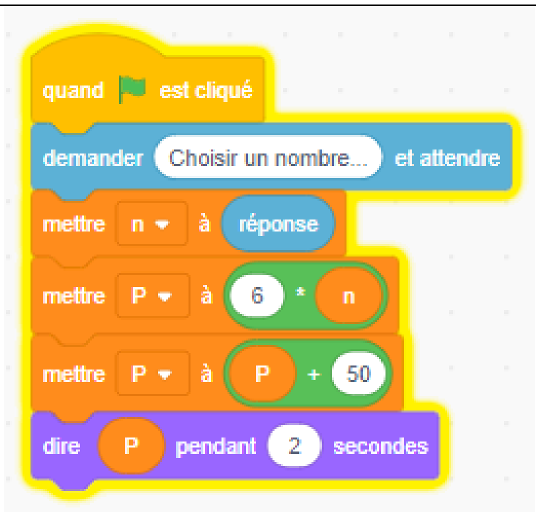
CONNAITRE ET EXPLOITER DES FONCTIONS PARTICULIERES : FONCTIONS AFFINES et FONCTIONS LINEAIRES

Dans cette séquence, nous allons étudier plusieurs situations qui se modélisent par des fonctions particulières appelées **fonctions linéaires** et **fonctions affines**.

Il est donc important de revoir la séquence n°5 « Notions de fonctions ».

I. *Du programme de calcul à l'expression algébrique*

<u>*Deux exemples*</u>

Une situation concrète	Un viticulteur propose un de ses vins au tarif de 6 € la bouteille, mais avec en plus un forfait fixe de transport de 50 €. Quelle sera le prix ***P*** payé par Etienne pour **n** bouteilles achetées.	Une crèche propose une garde d'enfant au tarif suivant : 3 € par heure de garde. Quelle sera la dépense ***D*** pour Emilien qui a fréquenté la crèche pendant ***h*** heures ?
Programme de calcul	« Je choisis un nombre ***n***. Je multiplie ce nombre par 6 et j'ajoute 50 au résultat. J'appelle ***P*** le résultat obtenu. »	« Je choisis un nombre ***h***. Je calcule son triple et j'appelle ***D*** le résultat obtenu. »
Programme Scratch		
Avec les fonctions	$\boldsymbol{P(n) = 6n + 50}$	$\boldsymbol{D(h) = 3h}$

<u>*Définitions*</u>

Une **fonction affine** f est une fonction qui, à un nombre x fait correspondre le nombre $\mathbf{a}\times x+\mathbf{b}$, où **a** et **b** sont des nombres donnés. *Autrement dit :* $f(x) = \mathbf{a}x + \mathbf{b}$	Une **fonction linéaire** f est une fonction qui, à un nombre x fait correspondre le nombre $\mathbf{a}\times x$, où **a** est un nombre donné. *Autrement dit :* $f(x) = \mathbf{a}x$

<u>*Remarques*</u>

- Si **b** = 0, la fonction affine devient en fait une fonction linéaire.
- Si **a** = 0, on obtient une **fonction constante** (qui ne varie jamais donc…)
- On reconnait algébriquement une fonction grâce à sa **forme développée et réduite**.

EXERCICE TYPE 1 Déterminer par le calcul une image, ou un antécédent.

On considère la fonction $\boldsymbol{p}$ définie par : $\boldsymbol{f} : x \longmapsto 3x - 5$

1. La fonction $\boldsymbol{f}$ est-elle une fonction affine ? une fonction linéaire ?

2. a. Calculer l'<u>image</u> de $\frac{2}{7}$ par la fonction $\boldsymbol{f}$.

b. Déterminer un <u>antécédent</u> de 9 par cette fonction $\boldsymbol{f}$.

<u>Solution</u>

1. L'expression littérale de la fonction $\boldsymbol{f}$ est de la forme **a**x + **b** avec **a** = 3 et **b** = –5.
La fonction $\boldsymbol{f}$ st donc une fonction affine, mais n'est pas une fonction linéaire.

2. a. Calculons l'image de $\frac{2}{7}$ par la fonction $\boldsymbol{f}$:

On remplace x par $\frac{2}{7}$

$$\boldsymbol{f}(4) = 3\times\frac{2}{7} - 5 = \frac{6}{7} - \frac{35}{7} = -\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{7}}.$$

L'image de $\frac{2}{7}$ par la fonction **f** est $-\frac{\mathbf{29}}{\mathbf{7}}$.

b. Déterminer un <u>antécédent</u> de 9 par cette fonction $\boldsymbol{f}$ revient à chercher un nombre x tel que $\boldsymbol{p}(x) = 9$:

$$\boldsymbol{p}(x) = 9$$
$$3x - 5 = 9$$
$$3x - 5 {\color{red}+ 5} = 9 {\color{red}+ 5}$$
$$3x = 14$$
$$3x {\color{red}\div 3} = 14 {\color{red}\div 3}$$
$$x = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}$$

Une égalité dans laquelle
on cherche un nombre inconnu s'appelle
une **équation**.

Pour trouver la solution de cette équation, on effectue le programme de calcul à l'envers…

$x = \frac{\mathbf{14}}{\mathbf{3}}$ est un antécédent de 9 par la fonction $\boldsymbol{f}$.

EXERCICE TYPE 2 Expressions algébriques : fonctions affines ou pas ?

Voici plusieurs expressions de fonctions :

$$\boldsymbol{f}(x) = 5x - 12 \quad ; \quad \boldsymbol{g}(x) = 7x \quad ; \quad \boldsymbol{h}(x) = 5x\,(x - 2) \quad ; \quad \boldsymbol{d}(x) = (x - 3)(x + 2) - x^2$$

Dans chaque cas, dire s'il s'agit d'une fonction linéaire, ou affine, ou encore ni l'un ni l'autre ?

<u>Solution</u>

Afin de pouvoir conclure, lorsque c'est possible, il faut transformer les expressions sous leur forme développée et réduite : ici, on peut le faire pour les fonctions $\boldsymbol{h}$ e $\boldsymbol{d}$.

$\boldsymbol{h}(x) = 5x\,(x - 2)$;	$\boldsymbol{d}(x) = (x - 3)(x + 2) - x^2$
$\boldsymbol{h}(x) = 5x\times x + 5x\times(-2)$;	$\boldsymbol{d}(x) = x\times x + x\times 2 - 3\times x + (-3)\times 2 - x^2$
$\boldsymbol{h}(x) = 5x^2 - 10x$;	$\boldsymbol{d}(x) = x^2 + 2x - 3x - 6 - x^2$
$\boldsymbol{h}(x) = 5x^2 - 10x$;	$\boldsymbol{d}(x) = {\color{red}-}\, x {\color{red}- 6}$

$\boldsymbol{f}$ est donc fonction affine avec **a** = 5 et **b** = –12.

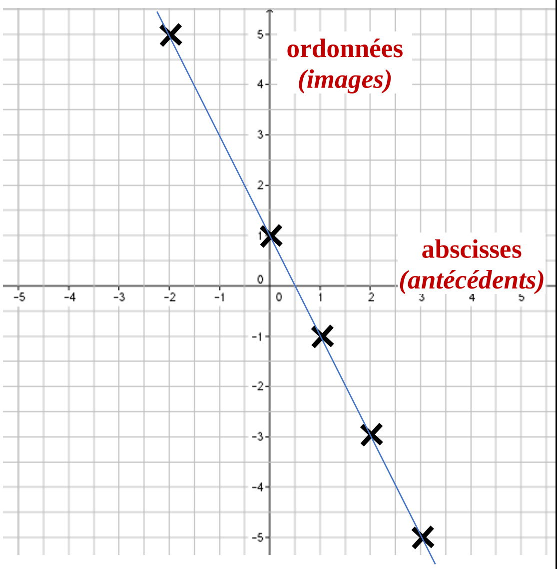
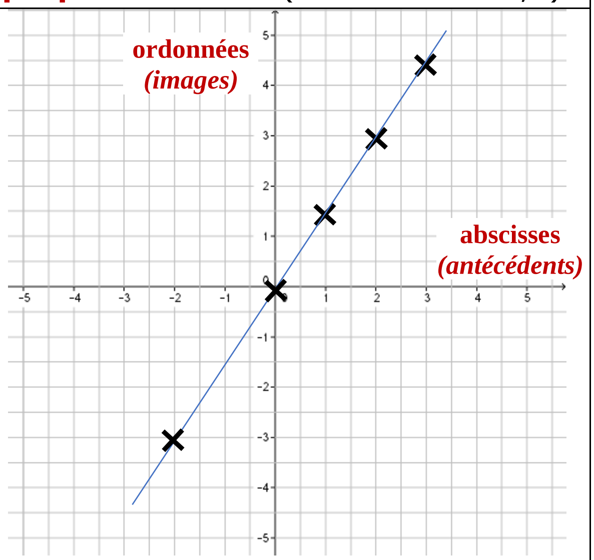
$\boldsymbol{g}$ est donc fonction linéaire avec **a** = 7.

$\boldsymbol{h}$ n'est ni une fonction affine ni fonction linéaire.

$\boldsymbol{d}$ est en fait une fonction affine avec **a** = –1 et **b** = –6.

II. Du tableau de valeurs à la représentation graphique

Deux exemples

	Exemple d'une fonction affine	*Exemple d'une fonction linéaire*
Expression algébrique	$f(x) = -2x + 1$	$g(x) = 1{,}5x$
Tableau de valeurs	<table><tr><td>x</td><td>–2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$f(x)$</td><td>5</td><td>1</td><td>–1</td><td>–3</td><td>–5</td></tr></table> Ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité.	<table><tr><td>x</td><td>–2</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>–3</td><td>0</td><td>1,5</td><td>3</td><td>4,5</td></tr></table> Ce tableau est un **tableau de proportionnalité** (de coefficient 1,5).
Et dans un graphique…	 Tous les points sont alignés.	 Tous les points sont alignés avec l'origine.

Propriétés des représentations graphiques

Dans un repère, la représentation graphique d'une **fonction affine** $f : x \longmapsto \mathbf{a}x + \mathbf{b}$ est une droite.	Dans un repère, la représentation graphique d'une **fonction linéaire** $f : x \longmapsto \mathbf{a}x$ est une droite qui passe par l'origine du repère.

Définitions

- Le nombre **b** est appelé l'**ordonnée à l'origine** car, quand $x = 0$, la droite passe obligatoirement par le point de coordonnées (0 ; **b**) : voir exercice-type 3.
- Le nombre **a** est appelé le **coefficient directeur** de la droite car il donne la « direction » ou encore la « pente » de la droite quand on augmente x de 1 : voir exercice-type 4.

Remarque **Fonctions linéaires et situations de proportionnalité**

Les fonctions linéaires permettent donc de décrire les situations de proportionnalité. On retrouve en effet la propriété observée dans la fiche de leçon sur la proportionnalité :

> « Dans une situation de proportionnalité, les points sont alignés sur une droite qui passe par l'origine du repère ».

EXERCICE TYPE 3 **Représenter graphiquement des fonctions affines et linéaires**

On considère les deux fonctions suivantes : $f(x) = -2x + 3$ et $g(x) = 3x$.

Représenter graphiquement les fonctions f et g dans le repère ci-dessous.

Solution

¤ L'expression $f(x) = -2x + 3$ est de la forme d'une fonction affine avec **a** = –2 et **b** = 3.
D'après la leçon, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
Il suffit donc de trouver deux points de cette droite pour la représenter graphiquement :

- *Premier point :*
  Pour $x = 0$, on a : $f(0) = -2\times0 + 3 = 3$.
  Donc le point A de coordonnées (0 ; 3) appartient à la droite.

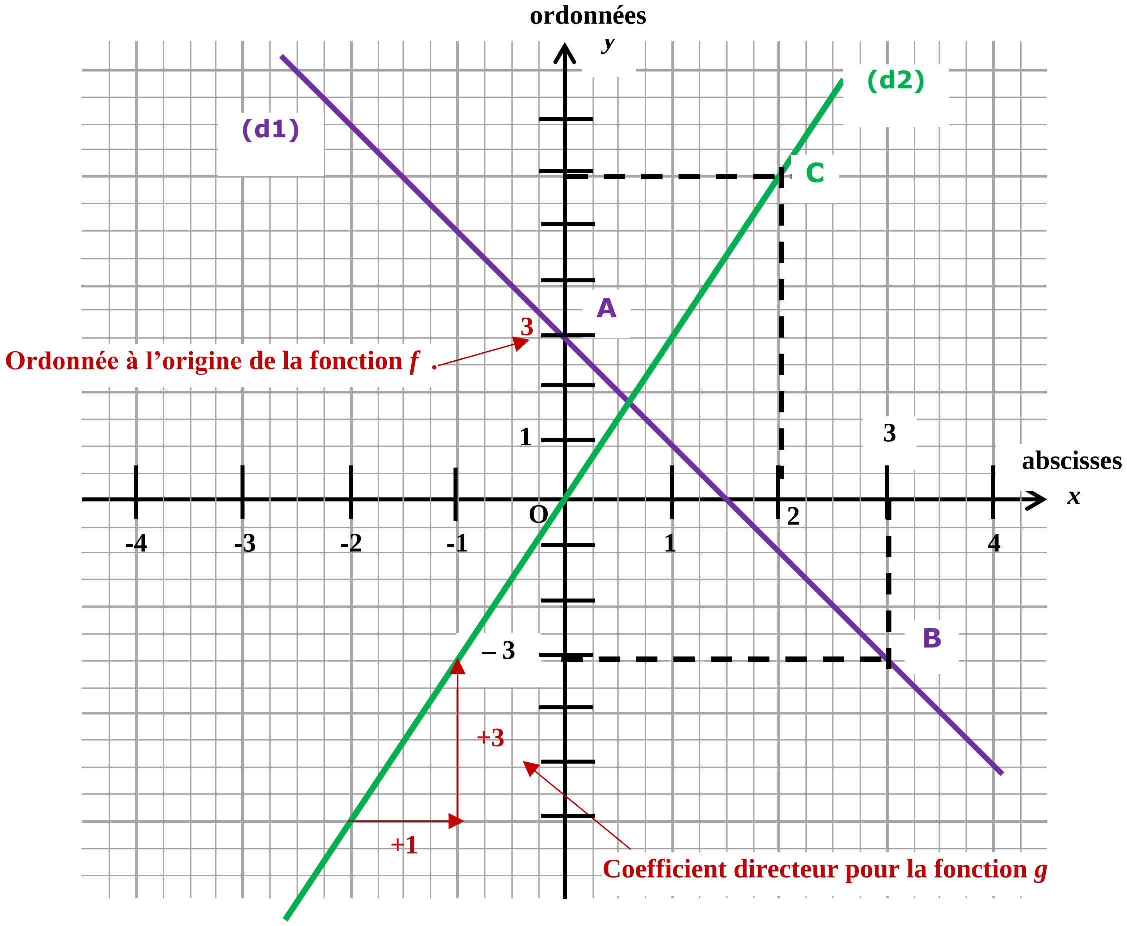
- Deuxième point :
  Prenons par exemple pour $x = 3$, on a : $f(3) = -2\times3 + 3 = -3$.
  Donc le point B de coordonnées (3 ; –3) appartient à la droite.

Il suffit donc de tracer la droite **(d1)** passant par les points A et B.

¤ L'expression $g(x) = 3x$ est de la forme d'une fonction linéaire avec **a** = 3.
D'après la leçon, la représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine.
Il suffit donc de trouver un autre point de cette droite en plus de l'origine :

- Prenons par exemple pour $x = 1$, on a : $g(2) = 3\times2 = 6$.
  Donc le point C de coordonnées (2 ; 6) appartient à cette droite.

Il suffit donc de tracer la droite **(d2)** passant par l'origine et le point C.



III. Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine (ou linéaire)

1. Sur une représentation graphique

Propriétés

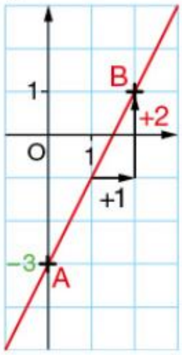
Une droite est la représentation graphique d'une fonction affine $f : x \longmapsto \mathbf{a}x + \mathbf{b}$:

¤ Le coefficient directeur **a** se lit sur la droite quand on augmente x de 1.

¤ L'ordonnée à l'origine **b** est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées.

Exemple 1 $a > 0$

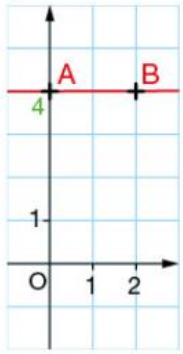
$f : x \mapsto 2x - 3$ $(a = 2, b = -3)$
La droite passe par A(0 ; –3) et B(2 ; 1).



Quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de 2.

Exemple 2 $a = 0$

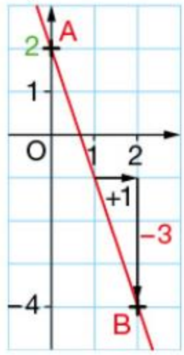
$g : x \mapsto 4$ $(a = 0, b = 4)$
La droite passe par A(0 ; 4) et B(2 ; 4).



La droite est parallèle à l'axe des abscisses.

Exemple 3 $a < 0$

$h : x \mapsto -3x + 2$ $(a = -3, b = 2)$
La droite passe par A(0 ; 2) et B(2 ; –4).



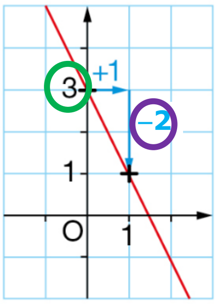
Quand x augmente de 1, $h(x)$ diminue de 3.

EXERCICE TYPE 4 **Lire graphiquement l'expression d'une fonction affine**

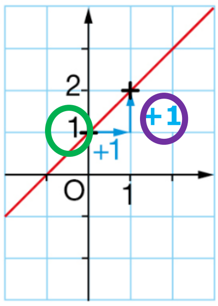
Les droites ci-dessous représentent graphiquement des fonctions affines.

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la fonction affine associée.

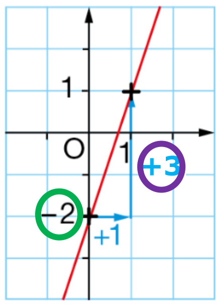
a.



b.



c.



Solution

Déterminer l'expression d'une fonction affine de la forme **a**x + **b** revient à lire sur le graphique le coefficient directeur **a** et l'ordonnée à l'origine **b**.

a. Le coefficient directeur est **a** = $\frac{-2}{1}$ = –2. L'ordonnée à l'origine est **b = +3**.

Cette droite correspond à la fonction affine $f : x \longmapsto -2x + 3$.

b. Le coefficient directeur est **a** = $\frac{+2}{1}$ = +1. L'ordonnée à l'origine est **b = +1**.

Cette droite correspond à la fonction affine $f : x \longmapsto x + 1$.

c. Le coefficient directeur est **a** = $\frac{+3}{1}$ = +3. L'ordonnée à l'origine est **b = –2**.

Cette droite correspond à la fonction affine $f : x \longmapsto 3x - 2$.

2. Par le calcul

Propriétés

Une fonction affine est de la forme $f : x \longmapsto \mathbf{a}x + \mathbf{b}$:

Si x_1 et x_2 sont deux nombres différents, alors le coefficient directeur est égal à :

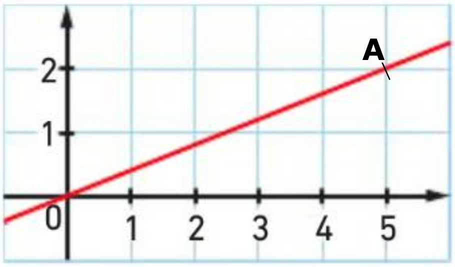
$$\mathbf{a} = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

EXERCICE TYPE 5 **Déterminer par le calcul l'expression d'une fonction affine**

Déterminer l'expression littérale des deux fonctions affines ***f*** et ***g*** suivantes :

a. la fonction ***f*** telle que ***f***(1) = 4 et ***f***(6) = 5.

b. la fonction ***g*** dont la représentation graphique est la droite ci-contre.



Solution

Déterminer l'expression d'une fonction affine de la forme **a**x **+ b** revient à déterminer :
- son coefficient directeur **a**
- et son ordonnée à l'origine **b**.

a. Pour la fonction ***f*** telle que ***f***(1) = 4 et ***f***(6) = 39 :

¤ Déterminons le coefficient directeur de la droite.
Avec la propriété de la leçon ci-dessus, le coefficient directeur est égal à :

$$\frac{f(6) - f(1)}{6 - 1} = \frac{39 - 4}{6 - 1} = \frac{\mathbf{35}}{\mathbf{5}} = \mathbf{7}$$

L'expression littérale de la fonction ***f*** est donc désormais de la forme ***f***(x) = **7**x **+ b**

¤ Déterminons désormais l'ordonnée à l'origine.
D'après l'énoncé, on sait que ***f***(1) = 4 donc 7×1 + **b** = 4
7 + **b** = 4
b = 4 – 7 = **–3**

Conclusion : L'expression littérale de la fonction affine ***f*** est ***f***(x) = **7**x – **3**.

b. Remarquons tout d'abord que la fonction ***g*** est une fonction linéaire car la droite passe par l'origine. L'ordonnée à l'origine est donc égale à 0 et on a donc juste le coefficient directeur à chercher…
Utilisons deux points : l'origine **O**(0 ; 0) et le point **A**(5 ; 2) de la droite (voir graphique).
Grâce à ces points, on peut donc écrire que : ***g***(0) = 0 et ***g***(5) = 2.
D'après la propriété de la leçon ci-dessus, le coefficient directeur est égal à :

$$\frac{g(5) - g(0)}{5 - 0} = \frac{2 - 0}{5 - 0} = \frac{2}{5} = \mathbf{0{,}4}$$

Conclusion : L'expression littérale de la fonction linéaire ***g*** est ***g***(x) = **0,4**x.