Séquence n°8

TRASNFORMER (1) et UTILISER des EXPRESSIONS LITTERALES POUR RESOUDRE DES PROBLEMES

I. *Transformer des expressions littérales (1) : réduire et développer*

1. *Qu'est-ce que deux expressions littérales égales ?*

Vocabulaire

On dit que **deux expressions littérales sont égales** s'il y a égalité pour n'importe quelle valeur choisie…

Transformer une expression littérale, c'est modifier son écriture en une autre expression littérale qui doit lui être égale…

Remarque : Les règles de calcul avec les nombres relatifs s'appliquent aussi en calcul littéral (vu que les lettres permettent de remplacer des nombres…).

EXERCICE TYPE 1 **Qu'est-ce qu'une égalité d'expressions littérales ?**

1. L'égalité $n^2 - 3n = 15 - n$ est-elle vraie pour $n = 5$ puis pour $n = -3$.

2. Peut-on dire que l'égalité $n^2 - 3n = 15 - n$ est toujours vraie ?

Solution

1. Pour tester une égalité pour un nombre donné, il faut calculer chaque membre de l'égalité séparément pour vérifier s'ils sont égaux ou non.

¤ Pour $n = 5$, on a : $n^2 - 3n = 5^2 - 3\times5 = 25 - 15 = \mathbf{10}$
$15 - n = 15 - 5 = 15 - 5 = \mathbf{10}$
L'égalité est donc vraie pour $n = 5$.

¤ Pour $n = -3$, on a : $n^2 - 3n = (-3)^2 - 3\times(-3) = 9 + 9 = \mathbf{18}$
$15 - n = 15 - (-3) = 15 + 3 = \mathbf{18}$
L'égalité est également vraie pour $n= -3$.

2. Pour $n = 0$, on a : $n^2 - 3n = 0^2 - 3\times0 = \mathbf{0}$
$15 - n = 15 - 0 = \mathbf{15}$ L'égalité est fausse pour $n = 0$.

Grâce à ce **contre-exemple**, je peux conclure que l'égalité $n^2 - 6n = 15 - 4n$ n'est pas vraie pour n'importe quelle valeur pour n.

2. Réduire une expression littérale

Vocabulaire

Réduire une expression littérale, c'est la transformer en diminuant le nombre d'opérations la composant.

EXERCICE TYPE 2 **Réduire des expressions littérales**

1. Vrai ou faux ? Justifier bien sûr…

Affirmation n°1 : $7x^3 - 2x = 5x^2$ *Affirmation n°2* : $5x + 2 = 7x$

2. Réduire les expressions suivantes :

$G = 9x^2 + 6x - 7 - 4x^2 + 2$; $H = 2x\times5 - 8 - 3x$; $L = 2x\times5\times3x$

Solution

1. *Affirmation n°1* :

Commençons par tester l'égalité $7x^3 - 2x = 5x^2$ avec un ou plusieurs nombres :

- Pour $x = 1$, on a : $7x^3 - 2x = 7\times1^3 - 2\times1 = 5$

  $5x^2 = 5\times1^2 = 5$ Cette égalité est vraie pour $x = 1$.

- Pour $x = 2$, on a : $7x^3 - 2x = 7\times2^3 - 2\times2 = 52$

  $5x^2 = 5\times2^2 = 20$ Cette égalité est fausse pour $x = 2$.

L'affirmation n°1 est donc fausse vu que l'on a trouvé un contre-exemple pour $x = 2$.

Affirmation n°2 :

Testons l'égalité $5x + 2 = 7x$ avec un ou plusieurs nombres :

- Pour $x = 0$, on a : $5x + 2 = 5\times0 + 2 = 2$

  $7x = 7\times0 = 0$ Cette égalité est fausse pour $x = 0$.

L'affirmation n°2 est donc fausse vu que l'on a trouvé un contre-exemple pour $x = 0$.

2. $S = 9x^2 + 6x - 7 - 4x^2 + 2 = 5x^2 + 6x - 5$

$T = 2x\times5 - 8 - 3x = 10x - 8 - 3x = 7x - 8$

$U = 2x\times5\times3x = 2\times5\times3 \times x\times x = 30x^2$

3. Développer une expression littérale

Vocabulaire

Développer un produit, c'est transformer ce produit en une somme (ou une différence).

Factoriser une somme (ou une différence), c'est la transformer en un produit.

Développer

Produit (×) Somme (+) ou différence (–)

Factoriser

Remarque : dans cette séquence, nous allons surtout nous intéresser à développer des produits.

Distributivité simple $\boxed{\mathbf{a(b+c) = ab + ac}}$.

produit ⇧ ⇧ somme ou différence

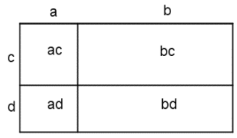
On dit que **a** est un « ***facteur commun*** »…

Distributivité double $\boxed{\mathbf{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}}$.

produit ⇧ ⇧ sommes et/ou différences

Illustration pour mieux comprendre :

l'aire du grand rectangle est égale à la somme des aires des 4 petits rectangles.



EXERCICE TYPE 3 **Développer des expressions littérales (1)**

Développer et réduire les expressions suivantes :

M = $8(x+3)$; N = $2x(5x–1)$; O = $–(3x^2–1+2x)$; P = $(3x–2)(–2x+1)$; R = $(3x – 5)^2$

Solution

$M = 8(x + 3) = 8×x + 8×3 = 8x + 24$

$K = 2x(5x – 1) = 2x×5x – 2x×1 = 10x^2 – 2x$

$L = – (3x^2 – 1 + 2x) = –3x^2 + 1 – 2x$

« On distribue le signe moins ».
Le calcul est le même que :
(–1) **×** $(3x^2 – 1 + 2x)$.
Cela revient donc à
changer tous les signes
à l'intérieur des parenthèses…

$J = (3x – 2)(–2x + 1) = 3x×(–2x) + 3x×1 + (–2)×(–2x) + (–2)×1$
$= –6x^2 + 3x + 4x – 2 = –6x^2 + 7x – 2$

$R = (3x – 5)^2 = (3x – 5)(3x – 5) = 3x×3x + 3x×(–5) + (–5)×3x + (–5)×(–5)$
$= 9x^2 – 15x – 15x + 25 = 9x^2 – 30x + 25$

Propriété (identique remarquable)

Pour tout nombre **a** et **b**, on a : $\boxed{\mathbf{(a + b)(a – b) = a^2 – b^2}}$

produit ⇧ ⇧ différence de deux carrés

EXERCICE TYPE 4 **Développer des expressions littérales (1)**

Développer et réduire les expressions suivantes : S = $(x – 5)(x + 5)$
et T = $(9x – 7)(9x + 7)$

Solution

$S = (x–5)(x+5) = x^2 – 5^2 = x^2 – 25$ *(identité remarquable avec* **a** = x *et* **b = 5***)*

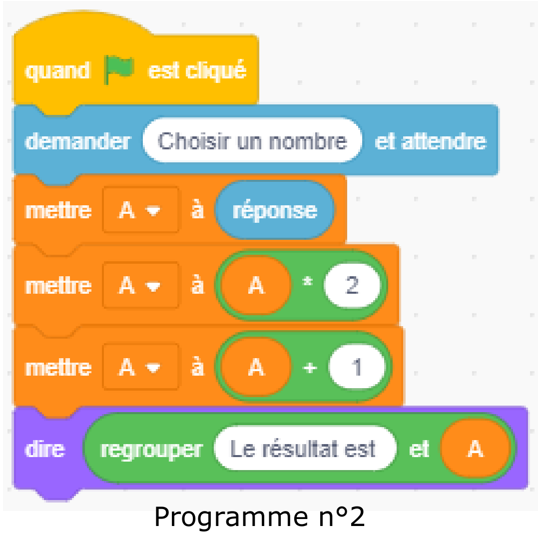
$7 = (9x–7)(9x+7) = (9x)^2 – 7^2 = 81x^2 – 49$ *(identité remarquable avec* **a** = $9x$ *et* **b = 7***)*

II. Résoudre des problèmes, avec des expressions littérales…

1. Montrer que deux programmes de calcul sont identiques…

EXERCICE TYPE 5 Est-il vrai que ces deux programmes ci-dessous donnent toujours le même résultat lorsque l'on choisit le même nombre de départ ? Justifier.

Programme n°1



Programme n°2

<u>Solution</u>

Recherche : Commençons par tester l'affirmation pour plusieurs exemples de nombres :

¤ Pour **A** = 0 : - Programme 1 : 0+3 = 3 ; 3 × 2 = 6 ; 6 – 5 =1
- Programme 2 : 0 × 2 = 0 ; 0 + 1 = 1

Les programmes 1 et 2 donnent le même résultat **1.**

¤ De même, on peut vérifier que :
- Pour **A** = 1, le programme 1 donne **3** comme résultat et le programme 2 donne **3**.
- Pour **A** = 2, le programme 1 donne **5** comme résultat et le programme 2 donne **5**.
- Pour **A** = 3, le programme 1 donne **7** comme résultat et le programme 2 donne **7**.

¤ Essayons même pour un autre nombre au hasard, par exemple pour **A** = 20 : le programme 1 donne **41** comme résultat et le programme 2 donne **41**…

¤ On peut essayer aussi avec le logiciel Scratch pour obtenir un plus grand nombre de résultats ou avec un tableur comme à la question précédente…

Conjecture : <u>il semble que</u>, pour n'importe quel nombre A choisi au départ, les deux programmes donnent toujours le même résultat…

<u>A savoir</u> Utilisons la lettre x pour représenter n'importe quel nombre choisi au départ.,

Calculs : Le programme de calcul n°1 revient à effectuer le calcul :

$$P_1 = (x+3)\times 2 - 5 = 2(x+3) - 5$$

Le programme de calcul n°2 revient à effectuer le calcul :

$$P_2 = x \times 2 + 1 = 2x + 1$$

Pour voir si les résultats donnent toujours le même résultat, transformons ces expressions littérales sous une même forme développée :

$$P_1 = 2(x + 3) - 5 = 2x + 6 - 5 = 2x + 1 = P_2$$

Autrement dit, si x est le nombre choisi au départ, le résultat sera toujours $2x + 1$…

Conclusion : il est donc **vrai** que ces deux programmes donnent toujours le même résultat lorsque l'on choisit le même nombre de départ.

2. Réfuter une affirmation générale…

EXERCICE TYPE 6 Est-il vrai que, pour n'importe quel nombre entier positif $n \geq 0$, le nombre $n^2 - n + 11$ est un nombre premier ? Justifier.

<u>*Solution*</u>

Recherche : commençons par tester l'affirmation pour plusieurs nombres :

¤ Pour $\mathbf{n} = 0$, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 0^2 - 0 + 11 = 11$.
11 est un nombre premier (ces deux diviseurs sont 1 et 11).

¤ Pour $\mathbf{n} = 1$, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 1^2 - 1 + 11 = 11$.
11 est un nombre premier (ces deux diviseurs sont 1 et 11).

¤ Pour $\mathbf{n} = 2$, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 2^2 - 2 + 11 = 13$.
13 est un nombre premier (ces deux diviseurs sont 1 et 13).

¤ Pour $\mathbf{n} = 3$, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 3^2 - 3 + 11 = 17$.
17 est un nombre premier (ces deux diviseurs sont 1 et 17).

¤ Pour $\mathbf{n} = 4$, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 4^2 - 4 + 11 = 23$.
23 est un nombre premier (ces deux diviseurs sont 1 et 23).

¤ Pour $\mathbf{n} = 5$, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 5^2 - 5 + 11 = 31$.
31 est un nombre premier (ces deux diviseurs sont 1 et 31).

¤ Pour pouvoir essayer rapidement plusieurs nombres, on peut <u>utiliser un tableur</u> : pour un nombre ***n*** dans la cellule A1, on utilise la formule **=A1^2 – A1 + 11** dans la cellule B1.

Avec la <u>recopie automatique</u>, on obtient ainsi la feuille de calcul ci-contre.

On remarque alors que, pour ***n*** = 11, le résultat obtenu est 121 qui a trois diviseurs : 1, 11 et 121.

	A	B
1		=A1^2-A1+11
2	1	11
3	2	13
4	3	17
5	4	23
6	5	31
7	6	41
8	7	53
9	8	67
10	9	83
11	10	101
12	11	121
13	12	143

Conclusion : comme nous avons trouvé un <u>**contre-exemple**</u>, l'affirmation « Le nombre $\boldsymbol{n^2 - n + 11}$ a exactement deux diviseurs pour n'importe quel nombre entier positif $\boldsymbol{n} \geq 0$ » est donc **fausse**.

<u>*A savoir*</u> Pour démontrer qu'une affirmation générale est fausse,
il suffit de **trouver un contre-exemple.**

3. Prouver une affirmation générale…

EXERCICE TYPE 7 La somme de trois nombres entiers positifs consécutifs est-elle toujours divisible par 3 ?

*Solution de la question **3** :*

Recherche : commençons par tester l'affirmation pour plusieurs nombres entiers positifs consécutifs :

¤ Pour les trois nombres consécutifs 0, 1 et 2 :
la somme de ces trois nombres est 0 + 1 + 2 = 3 qui est bien un multiple de 3.

¤ De même :
- Pour les trois nombres consécutifs 1, 2 et 3 : 1 + 2 + 3 = 6 et 6 est un multiple de 3
- Pour les trois nombres consécutifs 2, 3 et 4 : 2 + 3 + 4 = 9 et 9 est un multiple de 3
- Pour les trois nombres consécutifs 3, 4, 5 : 3 + 4 + 5 = 12 et 12 est un multiple de 3

¤ Essayons même avec trois nombres entiers positifs consécutifs au hasard :
Pour 11, 12 et 13 : 11 + 12 + 13 = 36 et 36 = 3 × 12 est encore bien divisible par 3…

Conjecture : il semble que cette proposition soit toujours vraie…

Méthode et calculs : notons **n** le deuxième des trois nombres entiers positifs consécutifs.
L'entier précédent sera alors **n–1**, et l'entier suivant sera **n+1**.
La somme de ces trois nombres est alors : $(\mathbf{n}-1) + \mathbf{n} + (\mathbf{n}+1) = 3\mathbf{n}$
Ainsi, le résultat obtenu est 3**n** et sera donc bien toujours divisible par 3, quel que soit le nombre **n** choisi.
(En effet, comme le résultat est le produit de 3 par un entier, c'est bien un multiple de 3).

Conclusion : on a donc démontré que, pour n'importe quels trois nombres entiers positifs consécutifs, leur somme est toujours un multiple de 3.

A savoir Pour démontrer qu'une affirmation générale est toujours vraie pour n'importe quel nombre, on utilise **une lettre pour représenter n'importe quel nombre**…