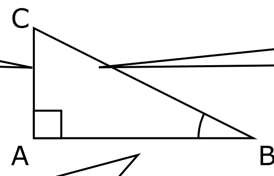
Séquence n°7

UTILISER LA TRIGONOMETRIE DANS UN TRIANGLE RECTANGLE

I. *Rappel de 4e : déterminer la mesure d'un angle aigu grâce au cosinus*

<ins>*Vocabulaire*</ins>

[AC] est le côté **opposé** à l'angle $\widehat{ABC}$.



[BC] est l'**hypoténuse**.

[AB] est le côté **adjacent** à l'angle $\widehat{ABC}$.

<ins>*Théorème et définition*</ins>

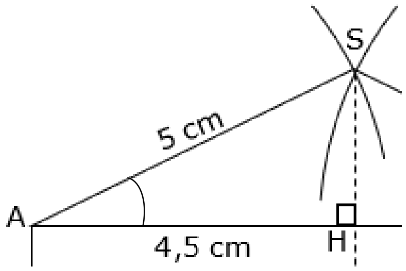
Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu donné,
le quotient $\dfrac{\textbf{longueur du côté adjacent à l'angle}}{\textbf{longueur de l'hypoténuse}}$ ne dépend que de la mesure de l'angle
est appelé **cosinus** de l'angle.

<ins>*Notation*</ins> Dans le triangle ABC ci-dessus, on note alors par exemple : $\cos(\widehat{ABC}) = \dfrac{AB}{BC}$

<ins>*Remarque*</ins> Comme l'hypoténuse d'un triangle rectangle est toujours le plus grand côté, le cosinus d'un angle aigu est toujours <ins>compris entre 0 et 1</ins>.

EXERCICE TYPE 1 **Déterminer la mesure d'un angle**

Pour la performance de panneaux photovoltaïques,
il est important de connaître l'inclinaison de ceux-ci.
L'inclinaison est ici représentée par l'angle $\widehat{HAS}$.
Déterminer la mesure de l'inclinaison $\widehat{HAS}$.
On donnera une valeur arrondie au degré près.



<ins>*Aide « Calculatrice »*</ins> **Pour déterminer un angle connaissant son cosinus**

Pour déterminer un angle connaissant son cosinus, on utilise la touche correspondant à $\boxed{\text{arccos}}$ ou $\boxed{\cos^{-1}}$ que l'on atteint souvent grâce à la touche $\boxed{\text{seconde}}$ ou $\boxed{\text{INV}}$ ou $\boxed{\text{Shift}}$…

Exemple (avec une Casio fx-92+ Spéciale Collège) :

Pour trouver l'angle $\widehat{ABC}$ tel que $\cos(\widehat{ABC}) = 0{,}67$, on tape : $\boxed{\text{seconde}}$ $\boxed{\text{arccos}}$ $\boxed{0{,}67}$
et on obtient à l'écran : $\widehat{ABC} = \arccos(0{,}67) \approx 47{,}9°$.

<ins>*Solution de l'exercice-type 3*</ins>

D'après la situation, on sait que le triangle HAS est rectangle en H.

D'après la leçon, on peut donc utiliser la définition du cosinus :

$$\cos(\widehat{HAS}) = \frac{\text{longueur du } \textbf{côté adjacent} \text{ à } \widehat{HAS}}{\text{longueur de l'}\textbf{hypoténuse}} = \frac{AH}{AS}$$

D'après les données : $\cos(\widehat{HAS}) = \dfrac{4{,}5}{5} = 0{,}9$

Avec la calculatrice, on obtient : $\widehat{\textbf{HAS}} = \arccos(0{,}9) \approx \textbf{26°}$.

II. Déterminer la mesure d'un angle aigu grâce à la trigonométrie

Théorème (admis)

Dans un triangle MNP rectangle en P, on a les formules de trigonométrie suivantes :

¤ $\cos(\widehat{NMP}) = \dfrac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \widehat{NMP}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

¤ $\sin(\widehat{NMP}) = \dfrac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{NMP}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$

¤ $\tan(\widehat{NMP}) = \dfrac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \widehat{NMP}}{\text{longueur du côté adjacent}}$

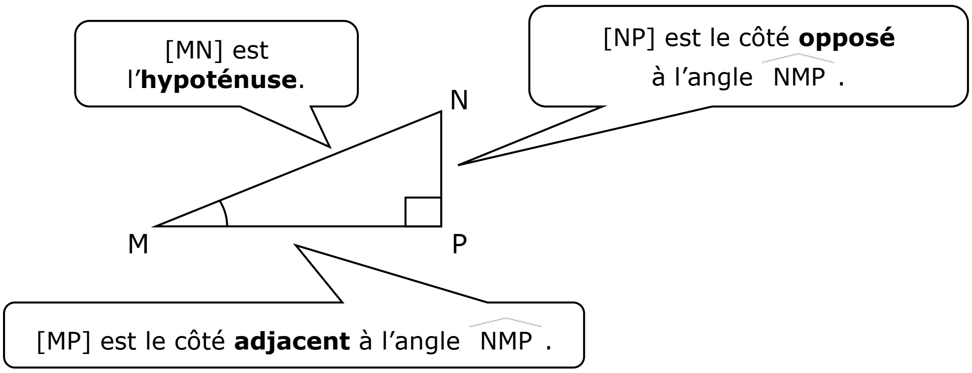
CahSohToa

Autrement dit :

¤ $\cos(\widehat{NMP}) = \dfrac{MP}{MN}$

¤ $\sin(\widehat{NMP}) = \dfrac{MP}{MN}$

¤ $\tan(\widehat{NMP}) = \dfrac{MP}{MN}$



Bien connaître sa calculatrice

- Les touches $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{sin}}$ et $\boxed{\text{tan}}$ de la calculatrice s'utilisent comme vu dans le paragraphe précédent…
- Attention ! Il existe plusieurs unités pour les angles (degrés, radians, grades). Au collège, on n'utilise que les degrés (°). Avant d'utiliser sa calculatrice, il faut donc toujours vérifier qu'elle est en mode « degré » : pour cela, vous devez regarder la notice de votre calculatrice…

EXERCICE TYPE 2

On considère le triangle JUS rectangle en J ci-contre.
Déterminer une valeur arrondie au degré près de l'angle $\widehat{JSU}$.

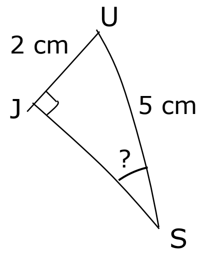


Figure à main levée

Solution

D'après l'énoncé, on sait que le triangle JUS est rectangle en J.
D'après la leçon, on peut donc utiliser la trigonométrie.

Dans ce triangle, on sait que : - JU = 2 cm (côté opposé à $\widehat{JSU}$)
- US = 5 cm (hypoténuse)

A partir des données, je détermine la formule à utiliser : **sinus**.

$$\sin(\widehat{JSU}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{JSU}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{JU}{SU}$$

D'après les données, on a donc : $\sin(\widehat{JSU}) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$

Grâce à la calculatrice, on a donc : $\widehat{JSU} = \arcsin(0{,}4) \approx 24°$.

III. *Déterminer la longueur d'un côté*

EXERCICE TYPE 3

On considère le triangle HAT rectangle en A ci-contre.
Combien mesure la longueur réelle de l'hypoténuse [HT] ?
On donnera une valeur arrondie au centième près.

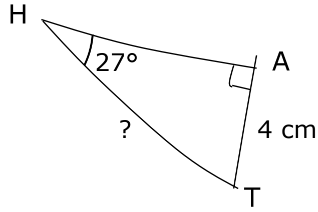


Figure à main levée

<u>Solution</u>

D'après l'énoncé, on sait que le triangle HAT est rectangle en A.
D'après la leçon, on peut donc utiliser la trigonométrie.
Dans ce triangle, on sait que $\widehat{AHT} = 27°$ et AT = 4 cm (côté opposé à $\widehat{AHT}$),
et je cherche la longueur de l'hypoténuse [HT].

A partir des données et de ce que je cherche, je détermine la formule à utiliser : **sinus**.

$$\sin(\widehat{AHT}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{AHT}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AT}{HT}$$

Avec les données, on a donc : $\sin(27) = \frac{4}{HT}$ ou encore $\frac{\sin(27)}{1} = \frac{4}{HT}$

Grâce au produit en croix, on a : $\mathbf{HT} = \frac{4 \times 1}{\sin(27)}$ **≈ 8,81 cm**.

EXERCICE TYPE 4

On considère le triangle SOL rectangle en L ci-contre.
Combien mesure la longueur réelle du côté [SL] ?
On donnera une valeur arrondie au millimètre près.

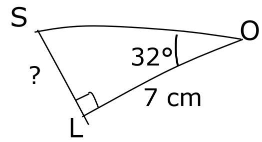


Figure à main levée

<u>Solution</u>

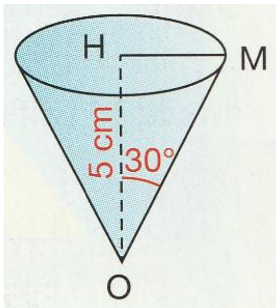
D'après l'énoncé, on sait que le triangle SOL est rectangle en L.
D'après la leçon, on peut donc utiliser la trigonométrie.
Dans ce triangle, on sait que $\widehat{SOL} = 32°$ et OL = 7 cm (côté adjacent à $\widehat{SOL}$),
et je cherche la longueur du côté opposé [SL].

A partir des données et de ce que je cherche, je détermine la formule à utiliser : **tangente**.

$$\tan(\widehat{SOL}) = \frac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{SOL}}{\text{longueur de côté adjacent}} = \frac{SL}{OL}$$

D'où : $\tan(32) = \frac{SL}{7}$ ou encore $\frac{\tan(32)}{1} = \frac{SL}{7}$, soit : $\mathbf{SL} = \frac{7 \times \tan(32)}{1}$ **≈ 4,4 cm**.

EXERCICE TYPE 5



On considère le cône de révolution d'axe (OH) représenté ci-contre en perspective cavalière.
Combien mesure la longueur réelle de côté [OM] de la base de ce cône ?
On donnera une valeur arrondie au millimètre près.

<u>Solution</u>

Comme (OH) est l'axe du cône, le triangle OHM est rectangle en H.
D'après la leçon, on peut donc utiliser la trigonométrie.
D'après les données, on a $\widehat{HOM} = 30°$ et OH = 5 cm (côté adjacent à $\widehat{HOM}$)
et je cherche la longueur de l'hypoténuse [OM].

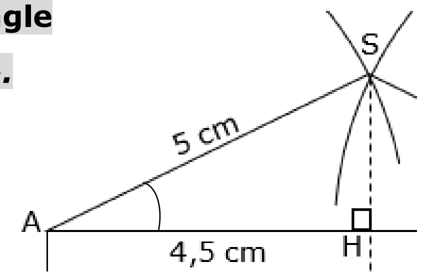
A partir des données et de ce que je cherche, je détermine la formule à utiliser : **cosinus**.

$$\cos(\widehat{HOM}) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{HOM}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{OH}{OM}$$

Avec les données, on a : $\cos(30) = \frac{5}{OM}$ d'où $\frac{\cos(30)}{1} = \frac{5}{OM}$ et $\mathbf{OM} = \frac{5 \times 1}{\cos(30)}$ **≈ 5,8 cm**.

EXERCICE TYPE 2 (suite) **Déterminer la mesure d'un angle**

Voir aussi l'exercice-type 1 de la fiche n°15 « Trigonométrie ».



Pour la performance de panneaux photovoltaïques,
il est important de connaître l'inclinaison de ceux-ci.
Dans la continuité de l'étude effectuée à l'exercice-type 2,
l'inclinaison est représentée par l'angle $\widehat{HAS}$.

Déterminer la mesure de l'inclinaison $\widehat{HAS}$.
On donnera une valeur arrondie au degré près.

<u>*Solution*</u>

D'après la situation, on sait que le triangle HAS est rectangle en H.

D'après la leçon, on peut donc utiliser la définition du cosinus :

$$\cos(\widehat{HAS}) = \frac{\text{longueur du } \textbf{côté adjacent} \text{ à } \widehat{HAS}}{\text{longueur de l'}\textbf{hypoténuse}} = \frac{AH}{AS}$$

D'après les données : $\cos(\widehat{HAS}) = \frac{4,5}{5} = 0,9$

Avec la calculatrice, on obtient : $\boldsymbol{\widehat{HAS}} = \arccos(0,9) \approx \mathbf{26°}$.