Séquence n°6

MOBILISER LA PROPORTIONNALITE : CALCULS, GRAPHIQUES, RATIOS, POURCENTAGES et GRANDEURS QUOTIENT

I. Repérer une situation de proportionnalité… ou non.

1. Par le calcul

Définition

Deux ***grandeurs*** sont ***proportionnelles*** si les valeurs de l'une s'obtiennent en ***multipliant*** (ou en ***divisant***) les valeurs de l'autre ***par un même nombre***.

EXERCICE TYPE 1 **Déterminer si un tableau est un tableau de proportionnalité ?**

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

Tableau 1

3	7	10
4,8	11,2	16

Tableau 2

5	4	11
10,5	8,12	23,1

Solution

On calcule pour chaque colonne le coefficient pour vérifier si c'est toujours le même…

Tableau 1 : $\frac{4,8}{3} = \mathbf{\frac{8}{5} = 1,6}$; $\frac{11,2}{7} = \mathbf{\frac{8}{5} = 1,6}$; $\frac{16}{10} = \mathbf{\frac{8}{5} = 1,6}$.

Tous les coefficients sont égaux, donc ce tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité $\frac{8}{5} = 1,6$.

Tableau 2 : $\frac{10,5}{5} = \mathbf{2,1}$; $\frac{8,12}{4} = \mathbf{2,03}$.

Deux des coefficients ne sont pas égaux, donc ce tableau ne peut pas être un tableau de proportionnalité.

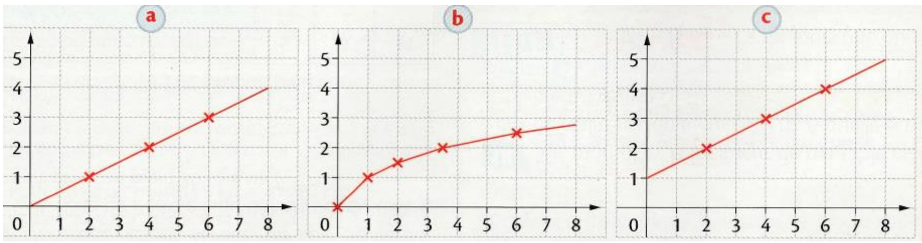
2. Par le graphique

Propriété

Graphiquement, une situation de proportionnalité est représentée par des points alignés sur **une droite qui passe par l'origine du repère**.

EXERCICE TYPE 2 **A partir de représentations graphiques**

Lequel de ces trois graphiques représente-t-il une situation de proportionnalité ?



Solution

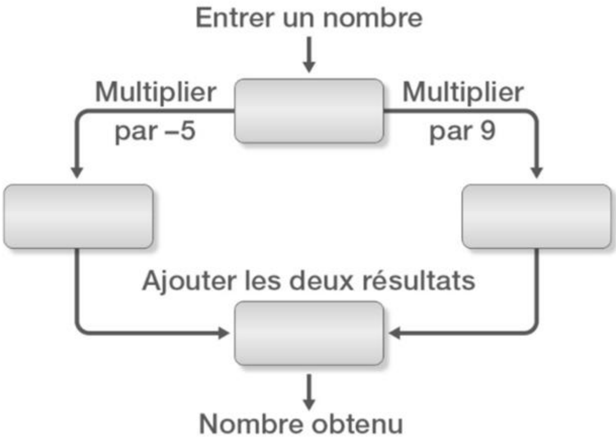
Parmi ces trois graphiques, seul le graphique **a.** représente une situation de proportionnalité, avec trois points alignés sur une droite qui passe par l'origine.

En effet : - sur le graphique **b.**, les quatre points ne sont pas alignés ;
- sur le graphique **c.**, la droite ne passe pas par l'origine.

3. Par une expression littérale

EXERCICE TYPE 3 **Proportionnalité, programme de calcul et expression littérale**

Voici un programme de calcul ci-contre.



1. Quel est le nombre obtenu si on choisit 7 comme nombre de départ ?

2. a. Compléter le tableau ci-dessous :

Nombre de départ	7	–1	0,4
Nombre obtenu			

b. S'agit-il d'un tableau de proportionnalité ? Justifier.

3. On note x le nombre de départ.
Exprimer, en fonction de x, le nombre obtenu, et justifier que ce programme correspond à une situation de proportionnalité quel que soit le nombre de départ.

<u>*Solution*</u>

1. Si on choisit 7, alors le nombre obenu sera : $7\times(-5) + 7\times9 = -35 + 63 = \mathbf{28}$.

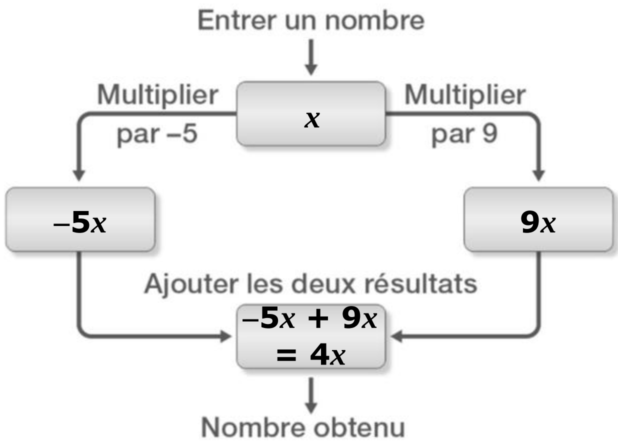
2. a. On obtient le tableau ci-contre.

Nombre de départ	7	–1	0,4
Nombre obtenu	28	–4	1,6

b. Calculons chaque coefficient : $\dfrac{28}{7} = \mathbf{4}$; $\dfrac{-4}{-1} = \mathbf{4}$; $\dfrac{1,6}{0,4} = \mathbf{4}$

On obtient toujours le même nombre, donc il s'agit d'un tableau de proportionnalité.

3. Reprenons le programme en notant x le nombre de départ.
Le nombre obtenu est alors $\mathbf{4x}$.
Autrement dit, entre le nombre x de départ et le nombre obtenu $\mathbf{4x}$, on multiplie toujours par 4 : c'est exactement la définition d'une situation de proportionnalité.
Ce programme correspond donc bien à une situation de proportionnalité quel que soit le nombre de départ.



II. *Calculer une 4e proportionnelle (rappels de 5e)*

EXERCICE TYPE 4 **Plusieurs démarches possibles…**

Le prix payé pour un achat en carburant est **proportionnel** au nombre de litres mis dans le réservoir.

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5
Grandeur 1	Volume de carburant (en L)	5	15	3	**C**=8	36,8
Grandeur 2	Prix (en €)	7	**A**=21	**B**=4,2	11,2	**D**=

Coefficient de proportionnalité

$\times\frac{7}{5}=\mathbf{1{,}4}$

$\times\frac{5}{7}$

5 × ? = **7**

A l'aide du tableau de proportionnalité ci-dessous, calculer le plus simplement possible les nombres A, B, C et D.

Avant de calculer, je cherche la méthode la plus simple !

Solution

Colonne 1 > *En multipliant une « colonne » par un nombre non nul.*
Comme $5\times3 = 15$, on a donc : $\mathbf{A} = 7\times3 = \mathbf{21}$.

Colonne 2 > *En multipliant par le* ***coefficient de proportionnalité****.*
$\mathbf{B} = 3\times\frac{7}{5} = \mathbf{4{,}2}$

Colonne 3 > *En additionnant ou soustrayant deux « colonnes »* (ici, colonnes 1 et 3)
Comme $7 + 4{,}2 = 11{,}2$ on a aussi : $\mathbf{C} = 5 + 3 = \mathbf{8}$.

Colonne 4 > En utilisant le « produit en croix » (ici, colonnes 1 et 3)
Comme $11{,}2\times36{,}8 = 8\times\mathbf{D}$, on a donc : $\mathbf{D} = \frac{11{,}2\times36{,}8}{8} = \mathbf{51{,}52}$

III. *Ratios entre deux ou trois quantités*

EXERCICE TYPE 5 **Ratio entre deux quantités…**

1. On partage une poche de 42 bonbons entre Louise et Emile dans le **ratio 3:4**, c'est à dire de telle manière que lorsque Louise reçoit 3 bonbons, son ainé Emile en reçoit 4… Combien Louise et Emile auront-ils de bonbons ?
2. 240€ sont partagés entre Mona et Solène dans le **ratio 2:3**. Combien chacune d'elles reçoit-elle ?

Solution

1. Pour partager dans le ratio 3:4, il faut partager les 42 bonbons en 3 + 4 = 7 parts contenant $\frac{42}{7} = 6$ bonbons.
   Louise aura donc $6\times3 = $ **18 bonbons** et Emile aura $6\times4 = $ **24 bonbons**.
   Vérification : $\frac{18}{24} = \frac{3\times6}{4\times6} = \frac{3}{4}$
2. Dire que l'on partage 240 € entre Mona et Solène dans le **ratio 2:3** revient à dire que les 240€ sont partagés en 5 parties égales et que Mona en reçoit 2 parts et Ninon en reçoit 3 parts.
   Comme $\frac{240}{5} = 48$, Mona reçoit donc $2\times48 = $ **96 €** et Ninon reçoit $3\times48 = $ **144 €**.
   Vérification : $\frac{96}{144} = \frac{2\times48}{3\times48} = \frac{2}{3}$

Remarque : Dire que « l'on partage 240 € dans le ratio 2:3 » revient à dire que : « Si je partage la somme d'argent de Mona en 2 parts égales, cela est égal à la somme d'argent de Ninon partagée en 3 parts égales ».

Définition On dit que deux nombres **a** et **b** sont de **ratios 2:3** si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{3}}$

On dit que deux nombres **a**, **b** et **c** sont de **ratios 2:3:5** si $\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{5}}$

EXERCICE TYPE 6 **Ratio entre trois quantités…**

Pour Noël, Céline et Djilali souhaitent partager 140 € entre leurs trois enfants Baptiste (l'ainé), Julie et Emile (le plus jeune) selon le ratio 5:3:2.

Combien chaque enfant recevra-t-il ?

Solution

Dire que l'on partage 140 € dans le ratio 5:3:2 revient à dire que les 140 € sont partagés en 5+3+2 = 10 parts égales et que Baptiste en reçoit 5 parts, Julie en reçoit 3 parts et Emile 2 parts.

Comme $\frac{140}{10} = 14$ €, on peut conclure que :
- Baptiste reçoit $14\times5 = 70$ €
- Julie reçoit $14\times3 = 42$ €.
- et Emile reçoit $14\times2 = 28$ €.

Vérification : $\frac{70}{5} = 14$; $\frac{42}{3} = 14$; $\frac{28}{2} = 14$.

IV. Pourcentages

<u>A savoir</u> Prendre un pourcentage d'une quantité, ou bien augmenter ou diminuer une quantité d'un pourcentage sont des situations de proportionnalité.

<u>Exemples</u>

Pourcentage	Prendre 5 % de x	Augmenter x de 25 %	Diminuer x de 7 %
Coefficient multiplicateur	Multiplier x par $5\% = \frac{5}{100} = \mathbf{0{,}05}$	Multiplier x par $1 + \frac{25}{100} = \mathbf{1{,}25}$	Multiplier x par $1 - \frac{7}{100} = \mathbf{0{,}93}$
Expression littérale	$\frac{5}{100}x = \mathbf{0{,}05}\,x$	$x + \frac{25}{100}x$ $= (1 + \frac{25}{100})\,x = \mathbf{1{,}25}\,x$	$x - \frac{7}{100}x$ $= (1 - \frac{7}{100})\,x = \mathbf{0{,}93}\,x$
En français…	***Prendre P % d'un nombre*** *revient à multiplier ce nombre par* $\frac{\mathbf{P}}{\mathbf{100}}$	***Augmenter de P % un nombre*** *revient à multiplier ce nombre par* $(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{100}})$	***Réduire de P % un nombre*** *revient à multiplier ce nombre par* $(\mathbf{1} - \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{100}})$

EXERCICE TYPE 7 **Utiliser les pourcentages**

1. Quel est le prix de cette raquette de Padel après réduction ?
2. Elen place 450 € sur un livret d'épargne rapportant 3 % d'intérêts par an.
   Quel sera le montant de son livret d'épargne au bout d'un an ?
   Et au bout de 2 ans ?
3. D'après l'ADEME (Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie) la masse de déchets produite en moyenne par un français en une année est passée de 315 kg en 2007 à 276 kg en 2013.
   Calculer le pourcentage de baisse de la masse de déchets entre 2007 et 2013 (arrondir à l'unité près).

<u>Solution</u>

1. Diminuer un prix de 30% revient à le multiplier par $1 - \frac{30}{100} = 0{,}7$.
   Le prix de cette raquette de Padel après réduction est donc $80 \times 0{,}7 =$ **56 €**.
2. *Info : les intérêts représentent une somme que la banque va verser à son client chaque année en pourcentage de la somme déposée sur le livret d'épargne durant l'année.*
   Augmenter un montant de 3 % revient à le multiplier par $1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$.
   Au bout d'un an, le montant du livret d'épargne d'Elen sera de $450 \times 1{,}03 =$ **463,5 €**.
   Et au bout de deux ans, ce montant sera de $463{,}5 \times 1{,}03 \approx$ **477,41 €** environ.
3. On calcule d'abord la diminution entre 2007 et 2013 : $315 - 276 = 39$ kg.
   On calcule la proportion <u>par rapport à la masse initiale</u> : $\frac{39}{315} \approx 0{,}1238 = 12{,}38\ \% \approx 12\ \%$.
   Entre 2007 et 2013, le pourcentage de baisse de la masse de déchets est d'environ **12 %**.

V. *Grandeur quotient*

1. Unités associées à quelques grandeurs quotients…

La masse (g), la longueur (m), l'intensité (A), la tension (V), le temps (h), etc. sont des grandeurs simples bien connues…
Une **grandeur quotient** provient du quotient de grandeurs simples : **l'unité d'une grandeur quotient doit être écrite en cohérence avec les unités des grandeurs simples qui la composent…**

EXERCICE TYPE 8 **Exemples de grandeurs quotient et d'unités associées**

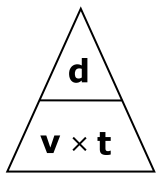
Relier chaque grandeur composée à l'unité (ou plusieurs) qui convient pour l'exprimer.

Densité de population •	• 27 m/s
Vitesse •	• 220 hab/km²
Rendement agricole •	• 50 km.h^{-1}
Prix de l'eau potable •	• 47 Mbit/s
Débit d'une connexion Internet •	• 5,6 t/ha
Prix du lait •	• 8 g.L^{-1}
Masse volumique : $\rho = \dfrac{m}{V}$ •	• 1,97 €/m^3
Consommation d'essence •	• 29,90 €/kg
Prix de la viande •	• 33 gouttes/min
Débit d'une perfusion médicale : $Q = \dfrac{V}{t}$ •	• 0,375 €/L
	• 100 mL.h^{-1}
	• 5 L/100 km

2. Exemples de grandeurs quotients

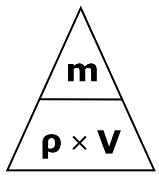
La **vitesse moyenne v** sur un trajet est le quotient de la distance parcourue **d** par la durée **t** du trajet.

$$\text{m/s} \longrightarrow \mathbf{v = \frac{d}{t}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{m} \\ \leftarrow \text{s} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathbf{d = v \times t} \\ \mathbf{t = \dfrac{d}{v}} \end{matrix}$$



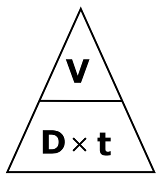
La **masse volumique ρ** d'un solide est le quotient de sa masse **m** par son volume **V**.

$$\text{kg/m}^3 \longrightarrow \mathbf{\rho = \frac{m}{V}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{kg} \\ \leftarrow \text{m}^3 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathbf{m = \rho \times V} \\ \mathbf{V = \dfrac{m}{\rho}} \end{matrix}$$



Le **débit moyen D** d'un tuyau est le quotient du volume **V** d'eau écoulé par la durée **t** d'écoulement.

$$\text{L/min} \longrightarrow \mathbf{D = \frac{V}{t}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{L} \\ \leftarrow \text{min} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathbf{V = D \times t} \\ \mathbf{t = \dfrac{V}{D}} \end{matrix}$$



EXERCICE TYPE 9

1. Un automobiliste parcourt 175 km en 2h30. Calculer sa vitesse moyenne en km/h.
2. L'Aude a un débit moyen de 44 m^3/s. Quel volume d'eau s'écoule en moyenne en 1 h ? *(Pour info, lors de la crue de 1999, le débit de l'Aude a atteint 4 000 m^3/s !)*
3. La masse volumique de l'or est égale à 19,3 g/cm^3 (pour de l'or à 24 carats, pur à 99 %). Le lingot d'or utilisé dans les transactions entre Banques centrales pèse 12,5 kg. Quel est le volume de ce lingot d'or (au dixième de cm^3 près) ?

<u>Solutions</u> *Attention, plusieurs autres démarches sont possibles…*

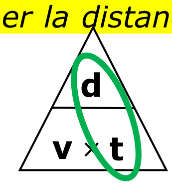
1. ***1ère démarche : avec la proportionnalité***

Analyse : déterminer la vitesse moyenne en km/h revient à trouver comme de kilomètres ont été parcourus en 1h. Et comme il y a 5 fois 30 min dans 2h30, et qu'il y a 2 fois 30 min dans 1h :

Si en 2 h 30 min, l'automobiliste a parcouru 175 km,
alors en 30 min, il a parcouru 175 ÷ 5 = 35 km,
et donc en 1h, il a parcouru 35×2 = 70 km. Sa vitesse moyenne est donc **70 km/h**.

2ème démarche : avec la formule

<u>Cohérence des unités</u> : pour obtenir la vitesse en km/h, il faut exprimer la distance en km, et le temps en h…



Unités : ¤ **d** = 175 km ¤ **t** = 2h30 = 2,5 h

La vitesse moyenne de cet automobiliste est : $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}} = \dfrac{175}{2,5} = \mathbf{70\ km/h}$.

2. ***1ère démarche : avec la proportionnalité***

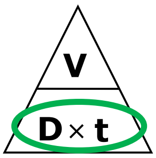
Analyse : dire que le débit est de 44 m^3/s revient à dire qu'il y a 44 m^3 d'eau qui s'écoule en 1s… Représentons ces données par un tableau de proportionnalité.

Temps d'écoulement	1 s	1 h = 3 600 s
Volume d'eau écoulé	44 m^3	?

En 1 h, il s'est donc écoulé 44 × 3 600 = **158 400 m^3** d'eau.

2ème démarche : avec la formule

<u>Cohérence des unités</u> : le débit étant donné en m^3/s, il faut exprimer la durée en s.



Unités : ¤ **D** = 44 m^3/s ¤ **t** = 1 h = 3 600 s

Le volume moyen d'eau écoulé en 1 h est :

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}\times\mathbf{t} = 3\,600 \times 44 = \mathbf{158\,400\ m^3}.$$

3. ***1ère démarche : avec la proportionnalité***

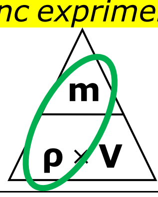
Analyse : dire que la masse volumique de l'or est égale à 19,3 g/cm^3 revient à dire que 1 cm^3 d'or pèse 19,3 g. Représentons ces données par un tableau de proportionnalité.

Volume	1 cm^3	?
Masse	19,3 g	12,5 kg = 12 500 g

Le volume d'un lingot d'or de 12,5 kg est donc de $\dfrac{12\,500 \times 1}{19,3} \approx \mathbf{647,7\ cm^3}$.

2ème démarche : avec la formule

<u>Cohérence des unités</u> : la masse volumique est donnée en g/cm^3, il faut donc exprimer la masse en g.



Unités : ¤ **ρ** = 19,3 g/cm^3 ¤ **m** = 12,5 kg = 12 500 g.

Le volume (en m^3) de ce lingot d'or est : $\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{m}}{\boldsymbol{\rho}} = \dfrac{12\,500}{19,3} \approx \mathbf{647,7\ cm^3}$.