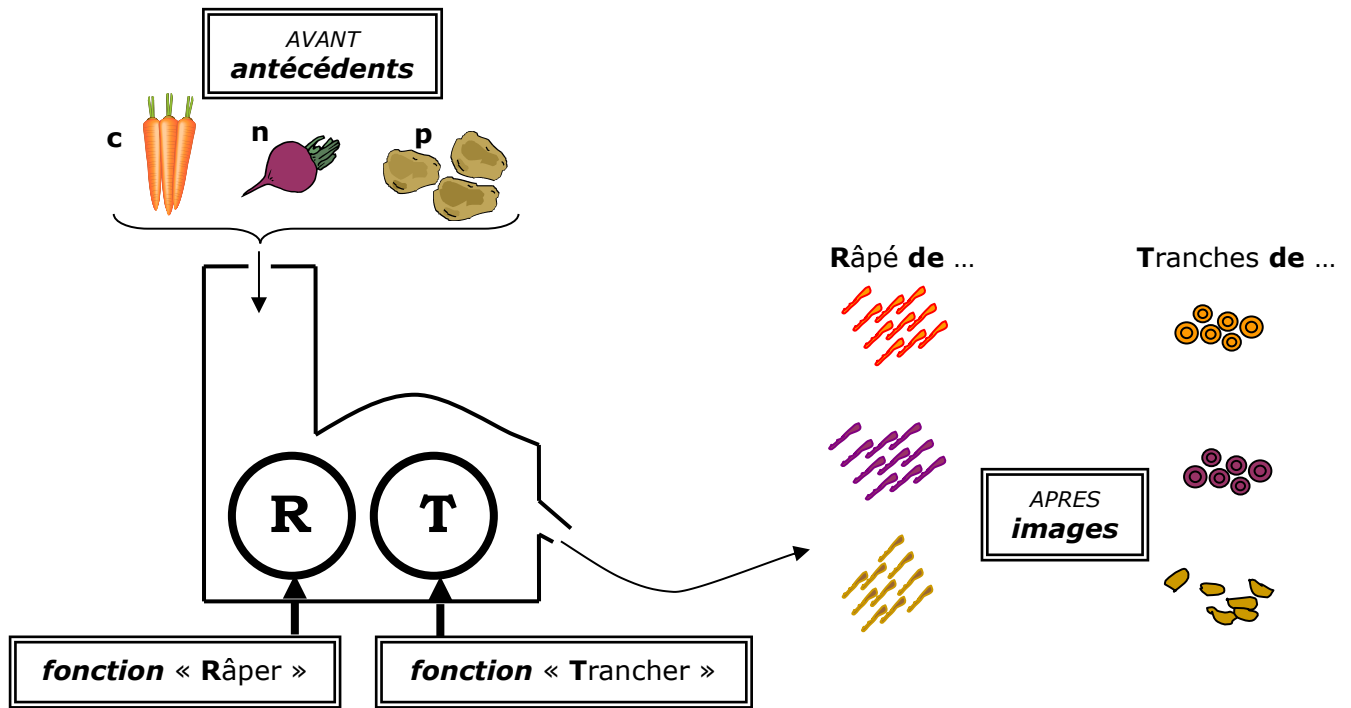
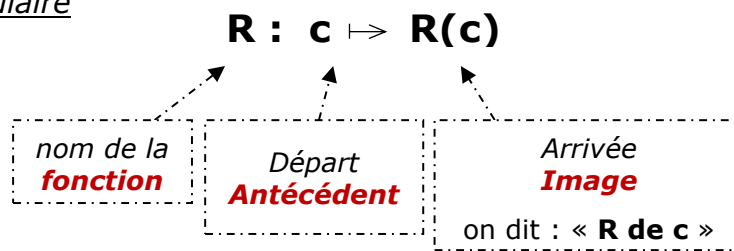


Séquence n°5
COMPRENDRE ET UTILISER LA NOTION DE FONCTION

I. Pour bien commencer : avec des légumes !



Notation et vocabulaire



Le nom de la **fonction** précise la transformation que l'on va effectuer...
 L'**antécédent** représente « ce que l'on a au départ ».
 L'**image** représente « ce que l'obtient à l'arrivée ».

Dans la suite de cette leçon, on considère la fonction p définie par le programme de calcul suivant :

« Je pense à un nombre.

Je calcule le carré de ce nombre et je soustrais 5 au résultat. »

II. Du programme de calcul à l'expression algébrique

EXERCICE TYPE 1 Comprendre un programme de calcul sur Scratch.

Voici une copie d'écran d'un programme réalisé avec le logiciel « Scratch ».

1. Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ, alors le programme renvoie -1.
2. Que renvoie le programme si on choisit au départ :
 - a. le nombre 6 ?
 - b. le nombre -4 ?
3. Déterminer deux nombres qu'il faut choisir au départ pour que le programme renvoie 4.
4. Si on note x le nombre de départ, exprimer, en fonction de x , le résultat que le programme va afficher pendant 2 secondes.



Solution

1. Appliquons le programme Scratch avec 2 comme nombre de départ :
 Commande 5 : $2 \times 2 = 2^2 = 4$
 Commande 6 : $4 - 5 = -1$
 Si on choisit 2 comme nombre de départ, alors **le programme renvoie bien -1.**
2. a. Avec le nombre 6, on a : $6^2 - 5 = 36 - 5 = \mathbf{31}$
 b. Avec le nombre -4, on a : $(-4)^2 - 5 = 16 - 5 = \mathbf{11}$
3. Attention, dans cette question, 4 est le résultat obtenu, c'est-à-dire l'image...
 Pour trouver le nombre manquant, effectuons le programme à l'envers :
 Commande 6 : $4 + 5 = 9$ (« Le contraire d'une soustraction est une addition... »)
 Commande 5 : $\sqrt{9} = 3$ (« Le contraire d'un carré est une racine carrée... »)
 Pour obtenir 4, on peut alors choisir **3 ou -3.**
 Vérification : $3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$ et $(-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$
4. Si on note x le nombre de départ, alors le résultat que le programme va afficher pendant 2 secondes sera : **$x^2 - 5$**

Notation et expression

$$p : x \mapsto x^2 - 5 \quad \text{ou encore : } p(x) = x^2 - 5$$

p : nom de la fonction

x : variable du départ
Antécédent

$p(x)$: nombre d'arrivée
Image de x par la fonction p

Et on dit : « la fonction p qui à x associe le nombre $x^2 - 5$. »

EXERCICE TYPE 2 Déterminer par le calcul une image, ou un antécédent.

On considère la fonction p définie par : $p : x \mapsto x^2 - 5$

1. Calculer l'image de 4 par la fonction p .
2. Déterminer un antécédent de 7 par cette fonction p .



On remplace x par 4

Solution

1. Calculons l'image de 4 par la fonction p : $p(4) = 4^2 - 5 = 16 - 5 = \mathbf{11}$.

L'image de 4 par la fonction p est **11**.

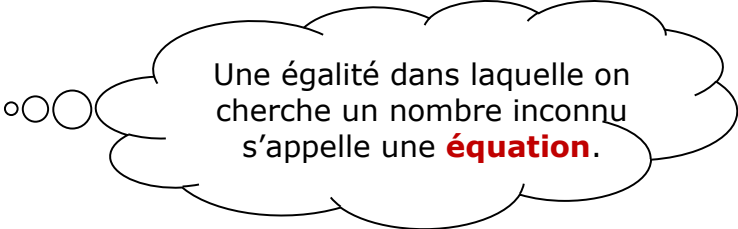
2. Déterminer un antécédent de 7 par cette fonction p revient à chercher un nombre x tel que $p(x) = 7$:

$$p(x) = 7$$

$$x^2 - 5 = 7$$

$$x^2 = 12$$

$$x = \sqrt{12}$$



Une égalité dans laquelle on cherche un nombre inconnu s'appelle une **équation**.

$x = \sqrt{12}$ est un antécédent de 7 par la fonction p .

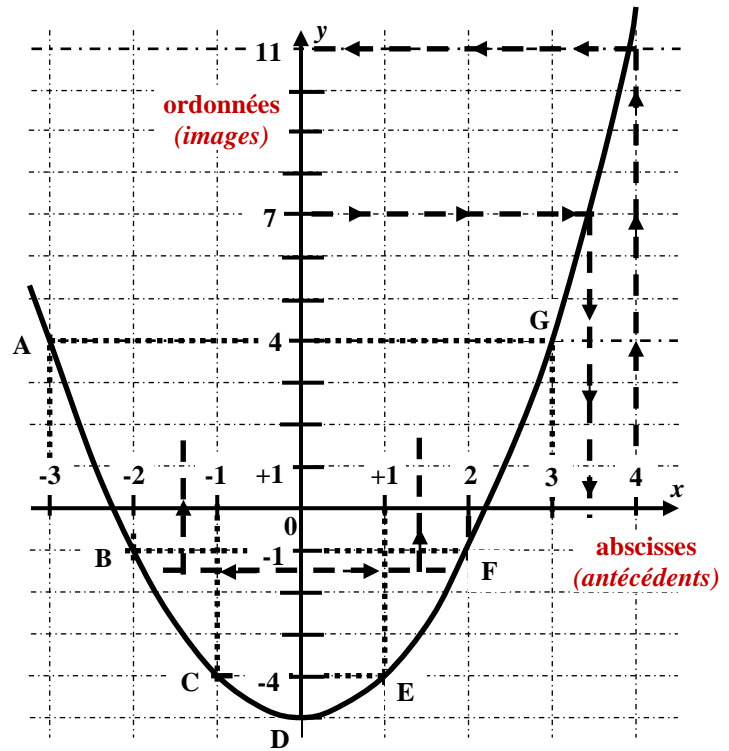
III. Du tableau de valeurs à la représentation graphique

Dans un repère, on peut obtenir une **représentation graphique** d'une fonction à l'aide d'un **tableau de valeurs**.

Exemple Avec la fonction $p : x \mapsto x^2 - 5$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$p(x)$	4	-1	-4	-5	-4	-1	4
point	A	B	C	D	E	F	G

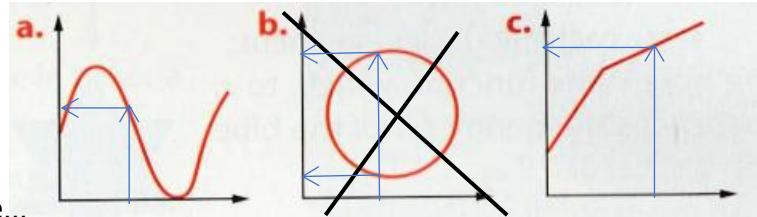
$p(1) = 1^2 - 5 = 1 - 5 = -4$
 donc le point **E** de coordonnées **(1 ; -4)** appartient à la représentation graphique de la fonction **p**.



Exemples et contre-exemple

Les figures **a.** et **c.** sont des représentations graphiques de fonctions.

La figure **b.** ne représente pas une fonction : en effet, avec une fonction, un nombre antécédent ne peut avoir qu'une seule image...



EXERCICE TYPE 3 Déterminer graphiquement une image, ou des antécédents...

On considère la fonction **p** définie et représentée ci-dessus.

- Déterminer graphiquement l'image de 4 par la fonction **p**.
- Déterminer graphiquement un antécédent de 7 par la fonction **p**.
- D'après le graphique, combien (-3) a-t-il d'antécédents ?

Solution

- Méthode : On cherche l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 7 en indiquant par des pointillés notre lecture graphique.
 Graphiquement, l'image de 4 par la fonction **p** est **approximativement 11**.
- Méthode : On cherche l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 en indiquant par des pointillés notre lecture graphique.
 Graphiquement, un antécédent de 7 par la fonction **p** est **environ 3,4**.
- D'après le graphique, (-3) a deux antécédents qui sont **à peu près -1,4 et 1,4**.

Remarques

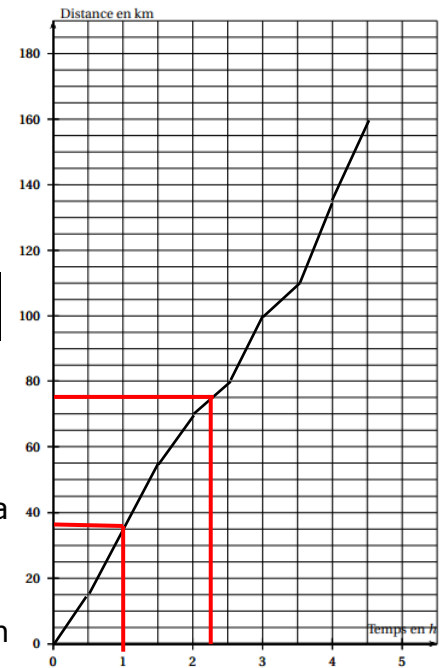
- ✕ Une lecture graphique ne permet d'obtenir que des valeurs approchées...
Pour déterminer une valeur exacte, il convient d'utiliser le calcul : voir exercice type 2.
- ✕ Un nombre a parfois plusieurs antécédents possibles : attention, de ne pas en oublier lors des lectures graphiques...

EXERCICE TYPE 4 Un exemple de situation concrète avec un graphique.

Le 17 juillet 2016, une spectatrice regarde l'étape « Bourg-en-Bresse / Culoz » du Tour de France. Elle note, toutes les demi-heures, la distance parcourue par le cycliste français Thomas Vœckler qui a mis 4 h 30 min pour parcourir cette étape de 160 km ; elle oublie seulement de noter la distance parcourue par celui-ci au bout de 1 h de course.

Elle obtient le tableau suivant :

Temps (en heures)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Distance (en km)	0	15	...	55	70	80	100	110	135



1. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 2 h 30 min ?
2. Montrer qu'il a parcouru 30 km lors de la troisième heure de course.
3. A-t-il été plus rapide lors de la troisième ou bien lors de la quatrième heure de course ?
4. Sur le graphique ci-contre, placer les 9 points du tableau (sans le point d'abscisse 1 puisque l'on ne connaît pas son ordonnée), et, avec votre règle, relier les points...
5. A partir de la représentation graphique obtenue, déterminer, par lecture graphique :
 - a. le temps qu'il a mis pour parcourir 75 km ;
 - b. la distance parcourue au bout de 1 h de course.

Solution

1. Comme 2h 30 min = 2,5h, la distance parcourue a été de 80 km.
2. Le troisième heure est entre 2h et 3h : il a donc bien parcouru $100 - 70 = 30$ km.
3. Lors de la quatrième heure de course, il a parcouru $135 - 100 = 35$ km, c'est-à-dire plus que lors de la troisième heure.
4. Voir graphique...
5. Par lecture graphique :
 - a. Il a mis environ 2,25 h = 2 h 15 min (deux heures et quart) pour parcourir 75 km.
 - b. Au bout de 1 h, il a parcouru 35 km environ.

IV. Avec un tableur

EXERCICE TYPE 5

Les représentations graphiques C_1 et C_2 de deux fonctions f et g sont données dans le repère ci-dessous.

La feuille de calcul ci-dessous permet de calculer des images par les fonctions f et g .

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	3
2	f(x)	=-2*B1+8					
3	g(x)						

1.
 - a. Calculer l'image de -2 par la fonction f .
 - b. On complète la ligne 2 de cette feuille de calcul par recopie automatique. Quelle formule sera alors dans la cellule C2 ?
 - c. Compléter les cellules C2 à G2 de cette feuille de calcul par les nombres manquants.
 - d. Expliquer pourquoi la représentation graphique de la fonction f est la courbe C_2 .
 - e. Exprimer en fonction de x l'expression de $f(x)$.
 - f. Déterminer une valeur exacte de l'antécédent de 5 par la fonction f .

2. La fonction g est définie par $g(x) = x^2 - 6x + 8$.
 - a. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 avant de l'étirer vers la droite jusqu'à G3 ?
 - b. Compléter les cellules B3 à G3 de cette feuille de calcul par les nombres manquants.
 - c. D'après la question 1.d., la représentation graphique de la fonction g est la courbe C_1 .

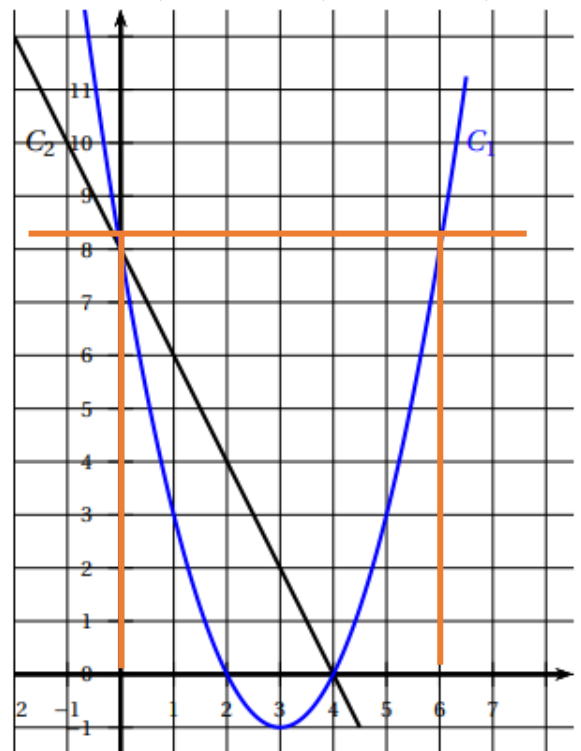
- d. Déterminer graphiquement deux antécédents de 8 par la fonction g .
 - d. Vérifier par le calcul que les lectures obtenues à la question 2.c. sont bien exactes.

3. Voici trois affirmations. Qu'en pensez-vous ? Vrai ou fausse ? Pourquoi ?

Affirmation n°1 : L'image de 5 par la fonction f est -1,9.

Affirmation n°2 : L'antécédent de 3 par la fonction g est -1.

Affirmation n°3 : $f(4) = g(4)$.



Solution

1. a. $f(-2) = -2 \times (-2) + 8 = 4 + 8 = 12$. L'image de -2 par la fonction f est **12**.
 b. Par recopie automatique, la formule dans la cellule C2 sera : **$=-2*C1+8$**
 c. Voir la ligne 2 de la feuille de calcul ci-après.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	-2	-1	0	1	2	3
2	f(x)	12	10	8	6	4	2
3	g(x)	$=B1^2-6*B1+8$	15	8	3	0	-1

- d. D'après les questions précédentes, **le point de coordonnées (2 ; 4)** appartient à la représentation graphique de f : c'est donc la courbe C_1 .
 e. En fonction de x , on a l'expression : **$f(x) = -2x + 8$**
 f. D'après le graphique, il semble que l'antécédent de 5 par la fonction f soit 1,5.
 Vérifions par le calcul : $f(1,5) = -2 \times 1,5 + 8 = -3 + 8 = 5$.
 Une valeur exacte de l'antécédent de 5 par la fonction f est bien **1,5**.
2. a. On peut saisir dans la cellule B3 la formule : **$=B1^2-6*B1+8$**
 b. Voir la ligne 3 de la feuille de calcul ci-dessus.
 c. Graphiquement, 8 semble avoir deux antécédents par la fonction g : $x = 0$ et $x = 6$.
 d. Vérification par le calcul : $g(0) = 0^2 - 6 \times 0 + 8 = 8$ et $g(6) = 6^2 - 6 \times 6 + 8 = 8$.
3. Affirmation n°1 : L'image de 5 par la fonction f est $-1,9$.

Sur le graphique, on peut penser que cette affirmation est vraie en prolongeant la droite.

Par le calcul, on a : $f(5) = -2 \times 5 + 8 = -10 + 8 = -2$

Cette affirmation est donc fausse car l'image de 5 par la fonction f est -2 .

Affirmation n°2 : L'antécédent de 3 par la fonction g est -1 .

Graphiquement, l'antécédent de 3 par la fonction g est environ 1 mais ne peut pas être égal à -1 . **Cette affirmation est donc fausse** : c'est en fait l'image de 3 par la fonction g qui est égale à -1 .

Affirmation n°3 : $f(4) = g(4)$.

Dire que « $f(4) = g(4)$ » signifie que les images de 4 par les fonctions f et g sont égales pour le même antécédent 4.

Autrement dit, sur le graphique, cela revient à regarder si les représentations graphiques des fonctions f et g se coupent en $x = 4$: cela semble vrai sur le graphique où il semble que $f(4) = g(4) = 0$.

Vérifions par le calcul : $f(4) = -2 \times 4 + 8 = 0$ et $g(4) = 4^2 - 6 \times 4 + 8 = 0$.

Cette affirmation est donc vraie.