Séquence n°4

CONNAITRE ET UTILISER LES TRIANGLES SEMBLABLES ET LE THEOREME DE THALES

I. *Triangles semblables*

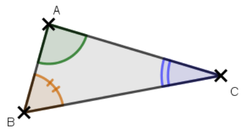
Définition On dit que deux triangles sont **semblables** (ou **de même forme**) lorsque tous leurs angles sont deux à deux de même mesure.

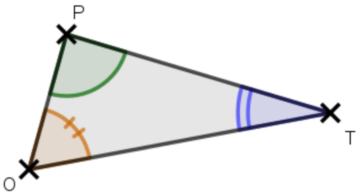
Propriété **Pour justifier que deux triangles sont semblables…**

Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables (de même forme).

Démonstration En effet, comme la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égal à 180°, si deux angles sont égaux, alors le troisième le sera aussi…

Exemple





D'après le codage des angles, les triangles ABC et POT sont semblables, c'est à dire de la même forme… Attention, ils ne sont pas forcément de la même longueur !

Théorème (admis)

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

Autrement dit Il s'agit d'une situation d'agrandissement ou de réduction.

Si deux triangles ABC et POT sont semblables tel que :

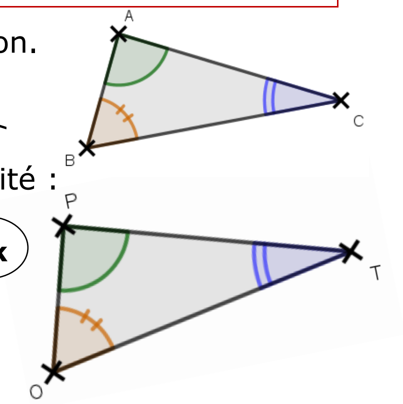
$\widehat{A} = \widehat{P}$; $\widehat{B} = \widehat{O}$; $\widehat{C} = \widehat{T}$

Alors le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Longueurs de ABC	BC	AC	AB
Longueurs de POT	OT	PT	OP

$\times$**k**

Autrement dit : $\boxed{\frac{\mathbf{OT}}{\mathbf{BC}} = \frac{\mathbf{PT}}{\mathbf{AC}} = \frac{\mathbf{OP}}{\mathbf{AB}} = \mathbf{k}}$

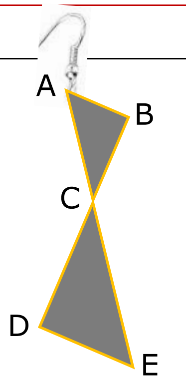


Théorème réciproque (admis)

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles,
alors ces triangles sont semblables.

EXERCICE TYPE 1

Voici une boucle d'oreille en argent, entourée d'un fil doré.
Elle est constituée de deux triangles ABC et CDE rectangles en B et en D.
On donne les renseignements suivants :
- Les points A, C et E d'une part, et B, C et D d'autre part sont bien alignés.
- En dimensions réelles, on a : AB = 1,2 cm ; AC = 2 cm et DE = 1,8 cm.



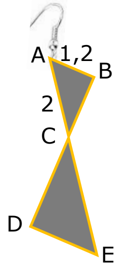
1. Déterminer la longueur du fil doré entre B et C.

2. Démontrer que les triangles ABC et CDE sont semblables.

3. En déduire la longueur totale de fil doré nécessaire pour entourer cette boucle d'oreille.

Solution

Avant tout, il faut reporter sur la figure toutes les données pour mieux voir les théorèmes de la leçon que l'on peut utiliser.



1. D'après l'énoncé, le triangle ABC est rectangle en B.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

AC² = AB²+ BC² d'où : $2^2 = 1{,}2^2 + BC^2$
$4 = 1{,}44 + BC^2$
$BC^2 = 4 - 1{,}44 = 2{,}56$
donc : $BC = \boxed{\sqrt{2{,}56}} = 1{,}6$ cm.

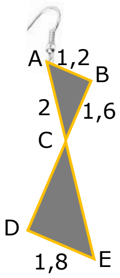
La longueur du fil doré entre B et C est donc de 1,6 cm.

2. D'après l'énoncé, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDE}$ sont des angles droits.
Comme les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DCE}$ sont opposés par le sommet, ils sont aussi égaux.
D'après la leçon, si deux triangles ont deux angles de même mesure, alors ils sont semblables
Les triangles ABC et CDE sont donc semblables.

3. Pour déterminer la longueur totale de fil doré nécessaire pour entourer cette boucle d'oreille, il nous faut d'abord déterminer les longueurs CD et CE.

D'après la question précédente, on sait que les triangles ABC et CDE sont semblables.

D'après la leçon, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont deux à deux proportionnelles.



On a donc : *Triangle ABC* → / *Triangle EDC* → $\dfrac{\mathbf{AC}}{\mathbf{CE}} = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{ED}} = \dfrac{\mathbf{BC}}{\mathbf{CD}}$

Côtés opposés à A et E

Côtés opposés à B et D.

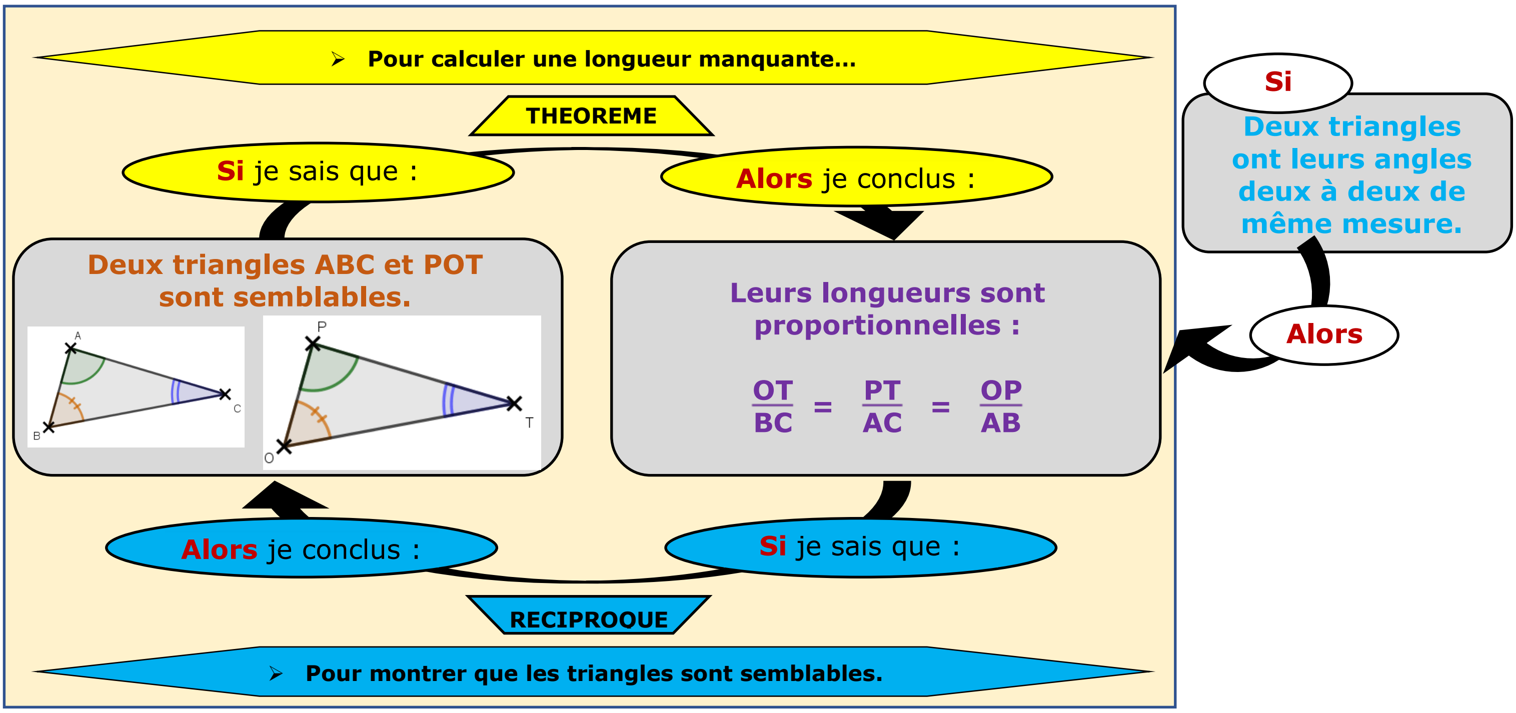
Côtés opposés à $\widehat{ACB}$ et $\widehat{DCE}$.

On remplace par les longueurs connues : $\dfrac{2}{CE} = \dfrac{1{,}2}{1{,}8} = \dfrac{1{,}6}{CD}$.

On utilise les produits en croix : $\mathbf{CE} = \dfrac{2\times1{,}8}{1{,}2} = \mathbf{3\ cm}$ et $\mathbf{CD} = \dfrac{1{,}8\times1{,}6}{1{,}2} = \mathbf{2{,}4\ cm}$

La **longueur totale de fil doré nécessaire** pour entourer cette boucle d'oreille est donc : AB + BC + CA + CD + DE + EC = 1,2 + 1,6 + 2 + 2,4 + 1,8 + 3 = **12 cm**.

ANNEXE 1 : une carte mentale pour mieux comprendre…



II. Théorème de Thalès : pour calculer des longueurs dans des triangles semblables

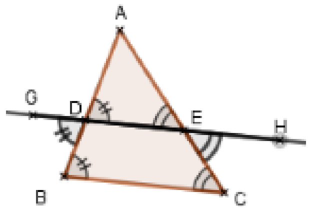
Théorème de Thalès

Si deux droites (BD) et (CE) sont sécantes en A et telles que les deux droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors les triangles ABC et ADE sont semblables.

Autrement dit : $\mathbf{\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}}$ *(longueurs des deux triangles deux à deux proportionnelles)*

Preuve (illustration dans le cas de figure-clé n°1)

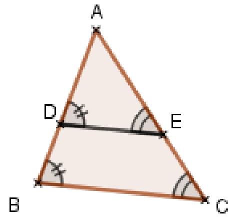
1ère étape :



Prolongeons le segment [DE] en une droite (GH) comme ci-contre.
On sait donc que :

- les droites (GH) et (BC) coupées par la sécante (BD) forment des angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{GBC}$ qui sont alternes-internes ;
- Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

D'après la leçon, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes sont égaux.
On peut donc conclure que $\widehat{GDB} = \widehat{ABC}$.
Comme les angles $\widehat{GDB}$ et $\widehat{ADE}$ sont **opposés par le sommet**, on peut conclure que donc $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.



2e étape :

Les triangles ont l'angle $\widehat{DAE}$ en commun et deux angles égaux puisque $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.
D'après la leçon, si deux triangles ont deux angles de même mesure, alors ils sont semblables.
Donc les triangles ADE et ABC sont semblables.

3e étape :

D'après la question précédente, on sait que les ADE et ABC sont semblables.
D'après la leçon, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

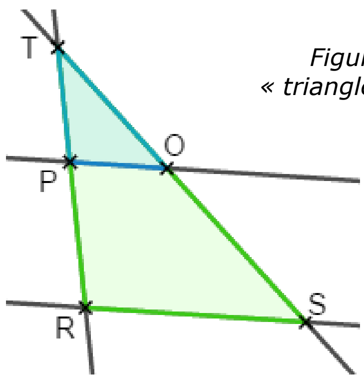
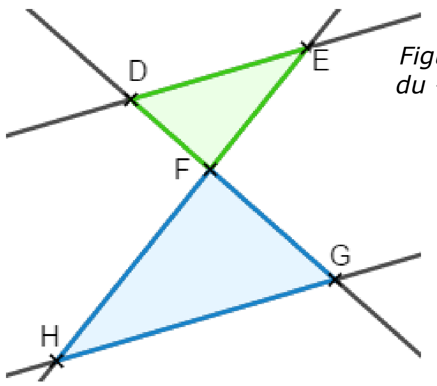
On a donc : *Triangle ADE* / *Triangle ABC* $\mathbf{\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}}$

Côtés opposés à A

Côtés opposés à E et C

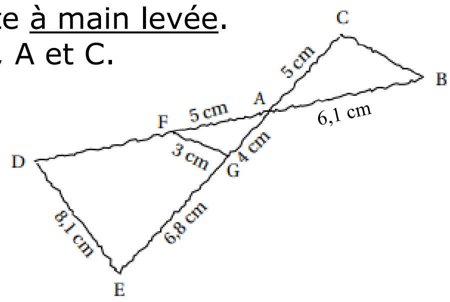
Côtés opposés à D et B

Les deux figures-clé à connaître

Figures-clé	 *Figure-clé des « triangles emboités »*	 *Figure-clé dite du « papillon »*
Données	➢ Les droites (PR) et (OS) sont sécantes en T ; ➢ Les droites (PO) et (RS) sont parallèles.	➢ Les droites (EH) et (DG) sont sécantes en F ; ➢ Les droites (DE) et (HG) sont parallèles.
Repérage des triangles	1er triangle : T P O ↕ ↕ ↕ 2ème triangle : T R S	1er triangle : F E D ↕ ↕ ↕ 2ème triangle : F H G
Conclusion	$\mathbf{\dfrac{TP}{TR} = \dfrac{TO}{TS} = \dfrac{OP}{RS}}$	$\mathbf{\dfrac{FE}{FH} = \dfrac{FD}{FG} = \dfrac{ED}{HG}}$

EXERCICE TYPE 2

Pour illustrer cet exercice-type, la figure ci-dessous a été faite à main levée.
Les points D, F, A et B sont alignés, ainsi que les points E, G, A et C.
On précise que les droites (FG) et (DE) sont parallèles.



1. Le triangle AFG est-il rectangle en G ?

2. Calculer la longueur du segment [AD].
En déduire la longueur du segment [FD].

3. Les droites (FG) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Solution

Attention, la figure est faite à main levée ! Il ne faut utiliser que les données de l'énoncé et non pas des impressions liées à la figure à main levée !

1. Dans le triangle AFG, d'après les données de la figure, on peut calculer :

- d'une part : $FG^2 + GA^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$
- d'autre part : $AF^2 = 5^2 = 25$.

L'égalité de Pythagore $FG^2 + GA^2 = AF^2$ est donc vérifiée.
D'après la réciproque du théorème de Pythagore,
on peut donc conclure que **le triangle est bien rectangle en G**.

2. Comme l'énoncé précise que les points D, F et A sont alignés, ainsi que les points E, G et A, on peut affirmer que les droites (FD) et (GE) sont sécantes en A.
D'autre part, il est aussi indiqué que les droites (FG) et (DE) sont parallèles.
On peut donc appliquer le théorème de Thalès pour les triangles AFG et ADE.

D'où : $\dfrac{AF}{AD} = \dfrac{AG}{AE} = \dfrac{FG}{DE}$ soit $\dfrac{5}{AD} = \dfrac{4}{10{,}8} = \dfrac{3}{8{,}1}$

Et donc (produit en croix) : $\mathbf{AD} = \dfrac{5 \times 10{,}8}{4} = \mathbf{13{,}5\ cm}$.

La longueur du segment [FD] est donc : $\mathbf{FD} = AD - AF = 13{,}5 - 5 = \mathbf{8{,}5\ cm}$.

3. Les droites (FB) et (GC) sont sécantes en A.
Si les droites (FG) et (BC) étaient parallèles, alors, d'après le théorème de Thalès, les rapports $\dfrac{AF}{AB}$ et $\dfrac{AG}{AC}$ devraient être égaux.

Mais d'après l'énoncé, on a :

¤ $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{5}{6{,}1} \approx 0{,}82$

¤ $\dfrac{AG}{AC} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

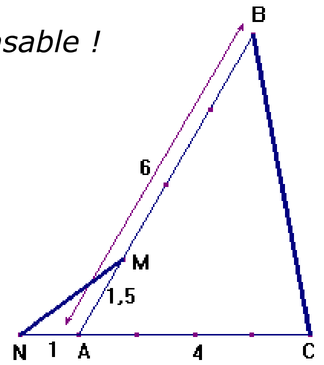
Les deux quotients ne sont pas égaux.
C'est donc que les droites (FG) et (BC) ne peuvent pas être parallèles.

III. Réciproque du théorème de Thalès : pour démontrer que deux droites sont parallèles…

Réciproque du théorème de Thalès

Si deux droites (BD) et (CE) sont sécantes en A telles que :
¤ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$
¤ les points A, D, B et les points A, E, C sont alignés dans le même ordre,
alors les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Remarque : *La donnée « alignés **dans le même ordre** » est indispensable !*



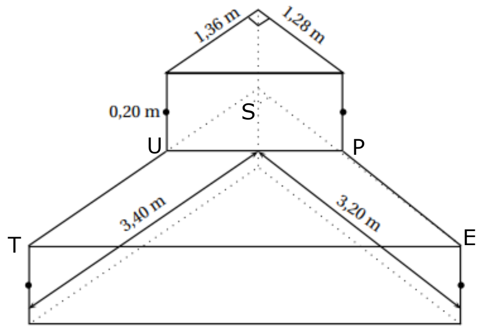
Etudions un contre-exemple avec la figure ci-contre.

Sur la figure ci-contre, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = 0{,}25$.

Les rapports sont bien égaux, comme dans le théorème de Thalès, mais les droites (MN) et (BC) ne sont pas du tout parallèles !

Pourtant les points A, M, B et les points A, N, C sont chacun alignés, **mais pas dans le même ordre**…

EXERCICE TYPE 3

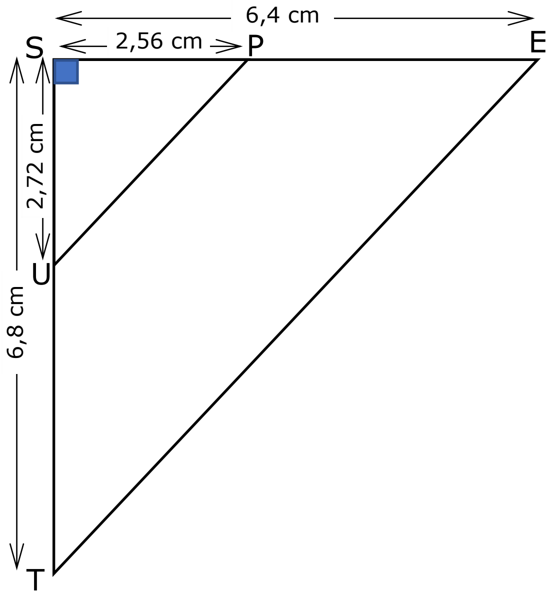


Pour pouvoir monter sur sa terrasse qui est légèrement surélevée, M. François décide de construire un escalier en béton, sous forme de deux prismes droits superposés, dont les bases sont des triangles rectangles.
Voici ses plans représentés ci-contre.

Avant de préparer le coffrage pour le béton, il vous demande si les deux marches seront bien « parallèles ».

1. Construire à l'échelle 1/50e une *vue de dessus* de cet escalier.
2. D'après vous, les deux marches seront-elles bien « parallèles » ?

Solution



1. Pour réaliser la vue de dessus à l'échelle 1/50e, Il faut d'abord déterminer les longueurs de la figure réduite (avec le produit en croix) :

	Echelle	SU	ST	SP	SE
Longueurs sur la vue de dessus (en cm)	1	1,36	3,40	1,28	3,20
Longueurs réelles (en cm)	50	2,72	6,8	2,56	6,4

2. La question revient à savoir si les droites (UP) et (TE) sont parallèles ou non.

Comparons les rapports $\frac{SP}{SE}$ et $\frac{SU}{ST}$:

$\frac{SP}{SE} = \frac{1{,}28}{3{,}20} = \mathbf{0{,}4}$ et $\frac{SU}{ST} = \frac{1{,}36}{3{,}40} = \mathbf{0{,}4}$

On sait donc que les droites (UT) et (PE) sont donc sécantes en A telles que :
¤ $\frac{SP}{SE} = \frac{SU}{ST}$;
¤ Les points S, U, T et les points S, P, E sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (UP) et (TE) sont donc parallèles, c'est à dire que **les deux marches** de cet escalier **sont bien parallèles**.

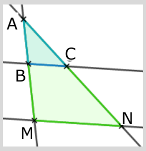
ANNEXE 2 : une carte mentale pour mieux comprendre…

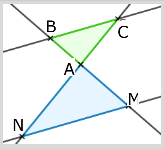
➢ **Pour calculer une longueur manquante…**

THEOREME

Si je sais que :

Les points A, B et M d'une part, et A, C et N d'autre part sont alignés.





Les droites sont parallèles.

Alors je conclus :

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{MN}$$

Les triangles sont semblables
et leurs longueurs sont proportionnelles.

Si je sais que :

Les points A, B et M d'une part, et A, C et N d'autre part sont alignés <u>dans le même ordre</u>.

Les droites sont parallèles.

Alors je conclus :

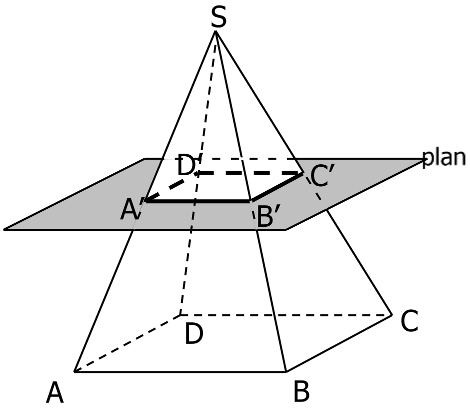
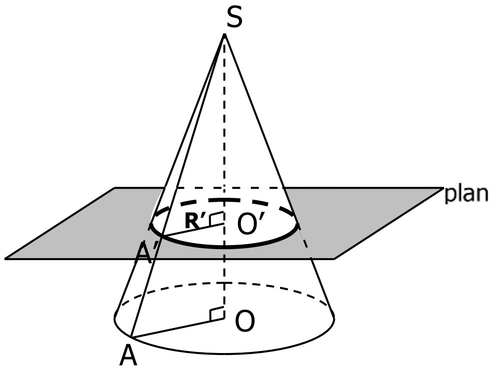
RECIPROQUE

➢ **Pour montrer que les droites sont parallèles.**

IV. *Dans une pyramide ou un cône…*

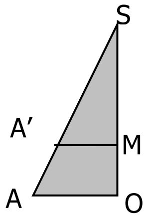
1. Section d'une pyramide ou d'un cône

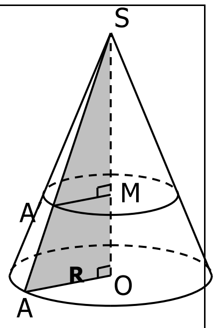
Figures-clés et propriétés (admises)

	
La section d'une pyramide ou d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est une **réduction de la base**.	

EXERCICE TYPE 4

On considère le cône de révolution de sommet S représenté ci-contre tel que OA = 6 cm, SO = 15 cm et SM = 10 cm.
Le plan parallèle à la base passant par M coupe [SA] en A'.
Déterminer le rayon A'M du disque ainsi obtenu.





Solution

Dans le triangle SAO, d'après les données de l'énoncé, on sait que :
- les points S, A' et A d'une part, et S, M et O d'autre part sont alignés ;
- les droites (A'M) et (AO) sont parallèles.

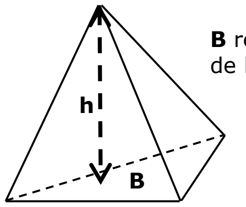
On peut donc appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{A'M}{AO}$

On remplace : $\dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{A'M}{6}$ d'où : $A'M = \dfrac{6 \times 10}{15} = 4$ cm.

La section obtenue est un disque dont le rayon est A'M = 4 cm.

2. Volume d'une pyramide ou d'un cône

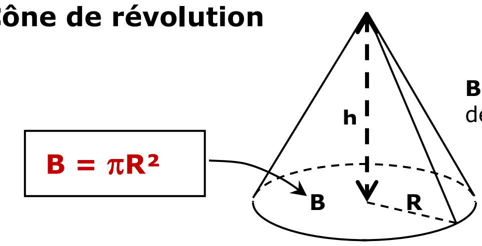
Pyramide



B représente l'**aire** de la base.

• Volume = $\dfrac{\text{Aire de la Base x hauteur}}{3} = \dfrac{\mathbf{B \times h}}{\mathbf{3}}$

Cône de révolution

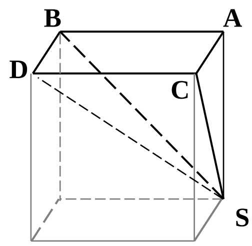


B représente l'**aire** de la base.

• Volume = $\dfrac{B \times h}{3} = \dfrac{\boldsymbol{\pi R^2 h}}{\mathbf{3}}$

EXERCICE TYPE 5

En justifiant votre réponse, dire si l'on peut verser 1 L d'eau dans la pyramide ABCDS ci-contre obtenue en découpant un cube de côté 1,5 dm ?



Solution

Avant de calculer le volume de la pyramide ABCDS, il faut déjà repérer convenablement la base et la hauteur associée.
Comme la pyramide est un morceau du cube, on peut voir que le côté [SA] est perpendiculaire au carré ABCD, et donc que la hauteur [SA] est associée à la base ABCD dont il faut d'abord calculer l'aire.
Aire du carré ABCD (base) : Aire(ABCD) = $c^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25$ dm².

Volume de la pyramide : $V = \dfrac{B \times h}{3} = \dfrac{\text{Aire(ABCD)} \times SA}{3} = \dfrac{2{,}25 \times 1{,}5}{3} = 1{,}125 \text{ dm}^3$.

Comme $1{,}125 \text{ dm}^3 = 1{,}125$ L > 1L, on peut verser 1 L d'eau dans cette pyramide.