Séquence n°3

COMPRENDRE ET UTILISER LA DIVISIBILITE DES ENTIERS : UN PEU D'ARITHMETIQUE…

L'**arithmétique** est un domaine des mathématiques où l'on étudie des propriétés des nombres entiers…

I. Division euclidienne : avec un reste…

$$\begin{array}{rrr|l} \text{Dividende} \rightarrow \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \leftarrow \text{Diviseur} \\ -\ 7 & 2 & & \\ \hline & 3 & 4 & \mathbf{9}\ \mathbf{4} \leftarrow \text{Quotient} \\ & -\ 3 & 2 & \\ \hline & & \mathbf{2} & \\ & & \text{Reste} & \end{array}$$

Exemple Effectuons la division euclidienne de 754 par 8 :

Vérification : 2 < 8
8 × 94 + 2 = 754

Définition Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre entier (dividende) par un autre nombre entier (diviseur), c'est trouver deux nombres entiers (quotient et reste) tels que :

- ***Dividende = Diviseur × Quotient + Reste***
- ***Reste < Diviseur***

Avec la calculatrice :

On peut utiliser la touche ├.

Si on tape 754 ├ 8,

Et on obtient : Q = 94 et R = 2.

Avec un tableur :

	A	B	C	D
1	Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
2	754	8	94	2

On utilise les formules suivantes : « =**QUOTIENT**(A2;B2) » « **MOD**(A2;B2) »

Avec Scratch :

L'opérateur « **modulo** » permet de déterminer le reste d'une division euclidienne.

Ce programme affichera le reste de 754 par 8…

EXERCICE TYPE 1

Un apiculteur doit transporter 800 pots identiques de miel.
Les pots sont rangés, le plus possible, dans des cartons de trois étages de 16 pots chacun.
Tous les cartons sont-ils pleins ?
Si non, combien y aura-t-il de pots dans le dernier carton ?

Solution

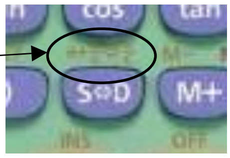
Modélisation : L'objectif est de partager les 800 pots de miel en cartons de 16×3 = 48 pots. Il s'agit donc poser la division euclidienne de 800 par 48.

Résolution : Pour résoudre ce problème, on peut poser la division euclidienne…
Il y a aussi plusieurs démarches possibles avec la calculatrice :

- *Démarche n°1 :* Avec la touche ├ de la calculatrice, on obtient : Q = 16 et R = 32.

  Il y a donc 16 cartons pleins et il reste 32 pots de miel dans le 17e carton qui est incomplet.

- *Démarche n°2 :* On tape $\frac{800}{48}$ et on utilise la touche $\boxed{a+\frac{b}{c}}$.



On obtient : $\mathbf{\frac{800}{48} = 16 + \frac{32}{48}}$.

Il y a donc 16 cartons pleins et il reste 32 pots dans le carton incomplet.

- *Démarche n°3 :* D'après la calculatrice, on a : $800 \div 48 \approx 16{,}67$.
Il y a donc 16 cartons pleins…
Pour trouver les parts restantes, on effectue le calcul : $800 - 16 \times 48 = 7$.

II. *Reconnaître un multiple ou un diviseur*

<u>Exemple</u> 48 est divisible par 6 car : « 48 est dans la table de 6 »
« $48 = 6 \times 8$ »
« $48 \div 6 = 8$ qui est un nombre entier »

On dit aussi que : « 48 est un multiple de 6 »
« 6 est un diviseur de 48 »

<u>Vocabulaire</u> Pour deux nombres entiers n et d non nuls,

n est ***divisible par*** *d*
n est un ***multiple de*** *d*
d est un ***diviseur de*** *n*

signifient

Il existe un nombre <u>entier</u> q (quotient) tel que : $\mathbf{n = d \times q}$

Autrement dit, le reste de la division euclidienne de n par d est égal à 0…

<u>Contre-exemple</u> 38 n'est pas divisible par 7 car $38 \div 7 \approx 5{,}42…$ n'est pas un nombre entier.

<u>Remarque</u>

¤ 1 est diviseur de tout nombre entier n car $n = 1 \times n$.
On peut aussi dire que tout nombre entier n se divise lui-même.

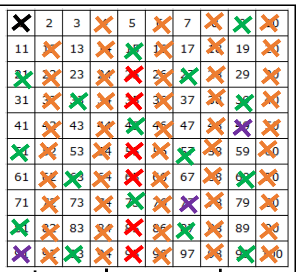
¤ Tout nombre entier n divise 0 car $0 = n \times 0$

III. *Décomposition en produit de facteurs premiers*

<u>Définition</u> Un **nombre premier** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

<u>Exemples</u> (à connaitre) : Les nombres premiers compris entre 1 et 30 sont :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29…

EXERCICE TYPE 2



1. Déterminer la liste de tous les nombres premiers compris entre 1 et 100. On pourra utiliser la grille ci-contre pour s'aider.
2. Les nombres 124, 245 et 783 sont-ils de nombres premiers ?

<u>Solution</u>

1. Pour trouver tous les nombres premiers à partir de 1, on peut éliminer tous les nombres non premiers en utilisant les critères de divisibilité et les tables de multiplication…
Commençons par supprimer tous les **multiples de 2**, puis les **multiples de 3**, puis de l'entier suivant restant… jusqu'à l'entier $\sqrt{\mathbf{100}} = 10$.
Tous les nombres entiers non barrés sont donc des nombres premiers.

2. D'après les critères de divisibilité :
124 est divisible par 2 car son chiffre des unités est un 4.
245 est divisible par 5 car son chiffre des unités est un 5.
Et comme 7+8+3 = 18 et que 9 divise 18, le nombre 783 est divisible par 9.
Les nombres 124, 245 et 783 ne sont donc pas des nombres premiers.

Propriété (admise)
Si un nombre entier supérieur ou égal à 2 n'est pas un nombre premier, alors on peut toujours le décomposer en produit de facteurs premiers.

Exemple 306 n'est pas un nombre premier vu qu'il est divisible par 2, ou encore par 3…
On peut donc décomposer 306 en produit de facteurs premiers :

	306	2
306 ÷ 2 =	153	3
153 ÷ 3 =	51	3
51 ÷ 3 =	17	17
17 ÷ 17	1	

Les diviseurs **premiers** de 306 sont 2, 3 et 17.
Mais attention, 306 a d'autres diviseurs non premiers comme 6, 9, 51, …

La décomposition en produit de facteurs premiers de 306 est donc **306 = 2×3²×17**

EXERCICE TYPE 3

1. Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres entiers 124, 245 et 783.
2. Est-il vrai que 45 possède 6 diviseurs ? Justifier.
3. Décomposer en produit de facteurs premiers : A = 8×15×10 et B = 21^2×35

Solution

1. Ces trois nombres ne sont pas des nombres premiers (voir exercice-type précédent).

124	2
62	2
31	31
1	

245	5
49	7
7	7
1	

783	3
261	3
87	3
29	29
1	

124 = $\mathbf{2^2 \times 31}$ 245 = $\mathbf{5 \times 7^2}$ 837 = $\mathbf{3^3 \times 29}$

2. Décomposons 45 en produit de facteurs premiers :

45	5
9	3
3	3
1	

La décomposition en facteurs premiers de 45 est donc :
$45 = 3^2 \times 5$
Les diviseurs de 45 sont donc : **1**, **3**, 3^2 = **9**
et : 1×5 = **5**, 3×5 = **15**, 9×5 = **45**.

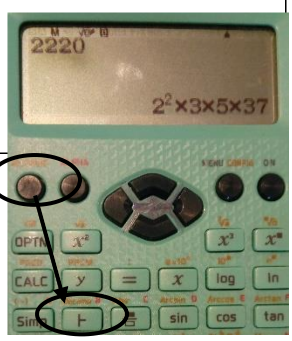
45 a effectivement 6 diviseurs.

3. $A = 8 \times 15 \times 10$
$= 2\times2\times2 \times 5\times3 \times 2\times5$
$= \mathbf{2^4 \times 3 \times 5^2}$

$B = 21^2 \times 35$
$= (7\times3)^2 \times 5\times7$
$= 7\times3 \times 7\times3 \times 5\times7$
$= \mathbf{3^2 \times 5 \times 7^3}$

Avec la calculatrice

On exécute le nombre 2 220 dans la calculatrice, puis on utilise la fonction « Décomp ».



EXERCICE TYPE 4 Baptiste collectionne des petits soldats : il en a déjà 24.
Pour bien présenter son armée de petits soldats, il souhaite les disposer en plusieurs rangées parallèles contenant le même nombre de petits soldats et de façon qu'il n'en reste bien sûr aucun.

Combien y-a-t-il de dispositions possibles pour ces 24 petits soldats.

<u>Solution</u>

Modélisation : Le problème revient en fait à déterminer le nombre de rangées possibles ce qui revient à **chercher tous les diviseurs de 24**.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Résolution : en décomposant 24 en produit de facteurs premiers, et on obtient $24 = 2^3 \times 3$.

La liste de tous les diviseurs de 24 est alors : 1, 2, 4, 8, 3, 6, 12 et 24.

Conclusion : comme pour chaque décomposition, il y a deux possibilités d'organiser l'armée, il y a, au total, **6 dispositions possibles** : 2×24 et 24×2, ou 4×6 et 6×4 ou encore 3×8 et 8×3.

IV. *Rendre une fraction irréductible grâce à la décomposition en facteurs premiers*

<u>Rappel</u> Une fraction est **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

EXERCICE TYPE 5 *Dans cet exercice, l'usage de la calculatrice est autorisée.*

Rendre les fractions suivantes irréductibles : $A = \frac{2\,856}{2\,940}$ et $B = \frac{1\,375}{2\,925}$

<u>Solution</u> Avec la calculatrice, on peut déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers du numérateur et du dénominateur :

$$A = \frac{7\,140}{2\,310} = \frac{2^3\times3\times7\times17}{2^2\times3\times5\times7^2}$$

Grâce à la règle fondamentale sur les fractions, on obtient :

$$A = \frac{7\,140}{2\,310} = \frac{2^{\cancel{3}}\times\cancel{3}\times\cancel{7}\times17}{\cancel{2^2}\times\cancel{3}\times5\times7^{\cancel{2}}} = \frac{2\times17}{5\times7} = \mathbf{\frac{34}{35}}$$

et on est sûr que $\frac{34}{35}$ est une fraction irréductible.

De la même manière, on a :

$$B = \frac{1\,375}{2\,925} = \frac{5^3\times11}{3^2\times5^2\times13} = \frac{5\times11}{3^2\times13} = \mathbf{\frac{55}{117}}$$ et $\frac{55}{117}$ est une fraction irréductible.

V. *Pour aller plus loin : résoudre des problèmes type PGCD ou PPCM…*

EXERCICE TYPE 6

1. Avec la calculatrice, décomposer 270 et 252 en produit de facteurs premiers.

2. Lors des vacances scolaires, un centre de loisirs reçoit 270 filles et 252 garçons. Le responsable du centre souhaite constituer des groupes équilibrés :
- Le même nombre de filles dans chaque groupe ;
- Le même nombre de garçons dans chaque groupe ;
- Et, bien sûr, tous les inscrits doivent tous appartenir à un groupe.

Quel nombre maximal de groupes pourra-t-il réaliser ?

Combien y aura-t-il de filles et de garçons dans chaque groupe ?

<u>Solution</u>

1. Avec la calculatrice, on obtient : $\mathbf{270 = 2\times3^3\times5}$ et $\mathbf{252 = 2^2\times3^2\times7}$.

2. Modélisation : On souhaite trouver le plus grand nombre de groupes possibles permettant de partager équitablement les filles et les garçons.
Cela revient à chercher **le plus grand diviseur commun à 252 et 270**.

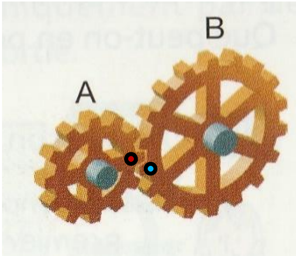
Résolution : En utilisant les décompositions obtenues au ***1.***, on peut conclure que le plus grand diviseur **commun** à 252 et 270 est $2\times3^2 = 18$.
Le responsable du centre pourra donc effectuer **18 groupes** contenant chacun $270\div18$ = **15 filles** et $252\div18$ = **14 garçons**.

Remarque On appelle **PGCD** de ***a*** et ***b*** le **P**lus **G**rand **D**iviseur **C**ommun de ***a*** et ***b***.

EXERCICE TYPE 7

Dans cet exercice, on indiquera les calculs effectués avec la calculatrice, mais le détail de ces calculs n'est pas demandé.

Une roue d'engrenage A a 12 dents.
Elle est en contact avec une roue B de 18 dents.



1. Combien de tours aura fait la roue B :

a. si la roue A a fait 9 tours ?

b. si la roue A a fait 13 tours ?

2. Pour se repérer, on marque par deux points la position des roues A et B au départ.
Au bout de combien de tours de chacune des roues seront-elles de nouveau et pour la première fois, dans la même position.

Solution

1. a. Quand la roue A fait 9 tours, alors les roues A et B ont tourné de $9\times12 = 108$ dents.
Comme la roue B a 18 dents, elle a réalisé $108 \div 18$ = **6 tours complets**.

b. Si la roue A fait 13 tours, alors les roues A et B ont tourné de $13\times12 = 156$ dents.
Comme la roue B a 18 dents, elle a réalisé $156 \div 18 = \frac{26}{3} = 8 + \frac{2}{3}$ tours.
La roue B a donc réalisé **8 tours complets et les deux tiers d'un autre tour**.

2. Modélisation : Les deux roues se retrouveront dans la même position quand elles auront fait un nombre entier de tours, qui doit correspondre à un multiple de 12 dents pour la roue A et de 18 dents pour la roue B.
Cherchons donc **le plus petit multiple commun à 12 et 18**.
Pour le trouver, utilisons la décomposition en facteurs premiers.

Résolution : $12 = 2^2\times3$ et $18 = 2\times3^2$.
Le plus petit multiple commun doit contenir les diviseurs de chacun, soit $2^2\times3^2 = 36$ dents.
Les roues occuperont donc à nouveau la même position pour la première fois au bout de $36\div12$ = **3 tours pour A**, et $36\div18$ = **2 tours pour B**.

Remarque On appelle **PPCM** de ***a*** et ***b*** le **P**lus **P**etit **M**ultiple **C**ommun de ***a*** et ***b***.