Séquence n°2

PAVE DROIT, CYLINDRE ET PRISME DROIT : SE REPERER et MODELISER UNE SITUATION SPATIALE

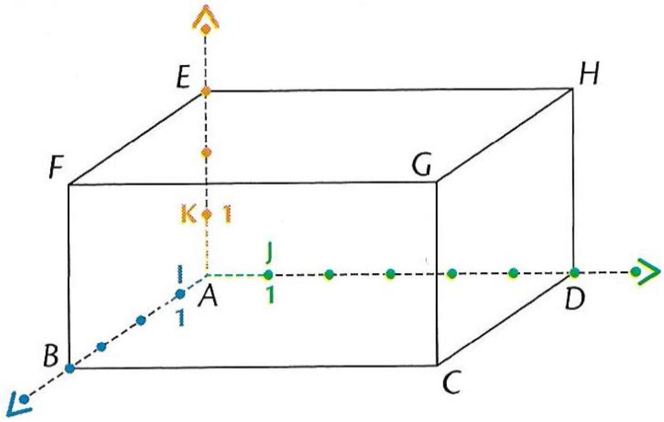
I. *Abscisse, ordonnée et altitude dans un pavé droit*

Sur un pavé droit, on peut se repérer par prenant un des sommets (l'**origine** du repère) et utilisant les trois arêtes issues de ce sommet (les trois **axes** du repère) en notant l'**abscisse** et l'**ordonnée** sur la base du pavé et l'altitude sur la troisième arête (hauteur).

Exemple

Le sommet A est l'origine.
La demi-droite [AI) est l'axe des abscisses.
La demi-droite [AJ) est l'axe des ordonnées.
La demi-droite [AE) est l'axe des altitudes.

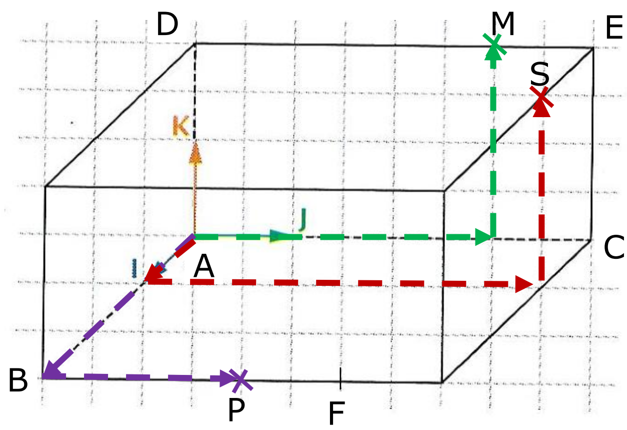
Dans ce repère, les coordonnées des points A, B, D, E, F et G sont :
A(0 ; 0 ; 0), B(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 6 ; 0)
E(0 ; 0 ; 3), F(4 ; 0 ; 3), G(4 ; 6 ; 3)



EXERCICE TYPE 1

On considère le pavé droit ci-contre, en prenant :
- L'origine est le sommet A ;
- Les axes sont portés par les demi-droites [AI), [AJ) et [AK) avec AI = AJ = AK = 1.

1. Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E et F.
2. Sur ce pavé, placer les points suivants : M(0 ; 3 ; 2), P(3 ; 2 ; 0) et S(1 ; 4 ; 2).



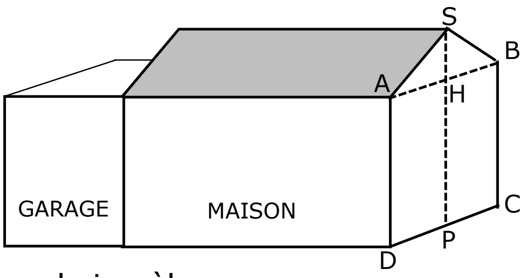
Solution

1. Les coordonnées des points B, C, D, E et F sont :
   B(3 ; 0 ; 0), C(0 ; 4 ; 0), D(0 ; 0 ; 2), E(0 ; 4 ; 2) et F(3 ; 3 ; 0).
2. Voir les points M(0 ; 3 ; 2), P(3 ; 2 ; 0) et S(1 ; 4 ; 2) placés sur la représentation ci-dessus.

II. *Vues de côté, de dessus, de face…*

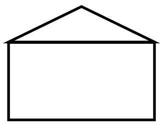
EXERCICE TYPE 2

On a représenté en perspective cavalière une maison, vue depuis le sud-est, à laquelle est accolé un garage.

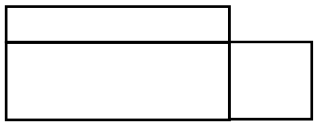


On précise que :
- la largeur [CD] de la maison est de 9 m.
- la largeur du pan sud du toit (grisé) est de 5 m.
- la coupe transversale du toit de la maison est un triangle isocèle.
- la hauteur du mur sud de la maison est la même que celle du garage et mesure 4,8 m.

1. Parmi les représentations suivantes, indiquer s'il s'agit d'une vue de dessous ou de dessus, de droite ou de gauche, de derrière ou de devant ?



vue de ………………



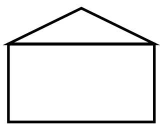
vue de ………………

vue de ………………

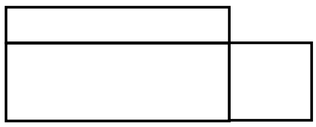
2. Construire une vue de droite de cette maison à l'échelle 1:100.

<u>*Solution*</u>

1.



vue de ***gauche***



vue de ***derrière***

vue de ***dessus***

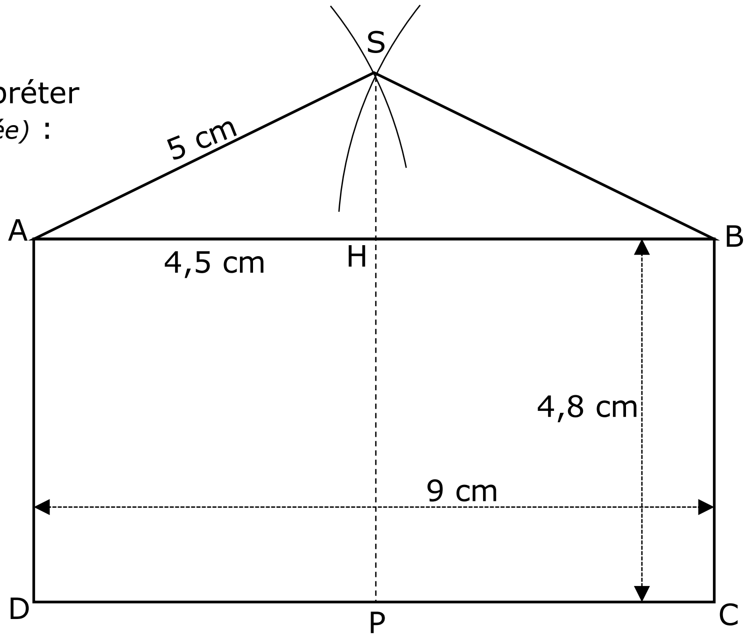
2. Avant de construire une vue de côté de cette maison, il faut repérer et interpréter les données de l'énoncé *(figure à main levée)* :

- la coupe transversale du toit est isocèle, donc SA = SB et (SH) ⊥ (AB).

- le mur sud de la maison a une hauteur de 4,8 m, donc HP = 4,8 m.

- la largeur du pan sud du toit est 5 m, donc AS = 5 m.

- la largeur de la maison est 9 m, donc CD = 9 m et DP = PC = 4,5 m.



On rappelle que l'échelle 1:100 signifie que l'on va représenter **1 cm sur la représentation** (vue de côté ici) **pour 100 cm de longueur réelle**.

III. *Mes propriétés et théorèmes vus depuis la 6e…*

Remarque En 3ème, tous les théorèmes sont des théorèmes qui s'appliquent sur des figures planes : autrement dit, lorsque l'on veut étudier une situation réelle de l'espace, il faut analyser la situation pour trouver des figures usuelles pour pouvoir appliquer les théorèmes de la leçon.
Il faut donc **connaître parfaitement les propriétés et théorèmes** depuis la 6e…

Propriété **Inégalité triangulaire**

Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours supérieure à la longueur du troisième côté.

Propriété **Somme des angles d'un triangle**

Dans tous les triangles, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

Propriété **Cas particuliers des triangles isocèles**

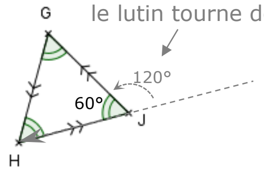
Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base ont la même mesure.

Réciproquement, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle.

Propriété **Cas particuliers des triangles équilatéraux**

Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles mesurent 60°.
Réciproquement, si un triangle a deux angles qui mesurent 60°, alors il est équilatéral.

Sur Scratch (voir TP 2), le lutin tourne de 120°…



Théorème de Pythagore **Pour calculer une longueur d'un triangle rectangle…**

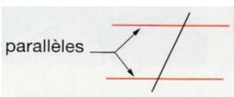
Si un triangle est un triangle rectangle, alors le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

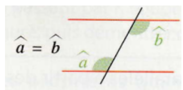
Réciproque du théorème de Pythagore ***Pour démontrer qu'un triangle est rectangle***

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est un triangle rectangle.

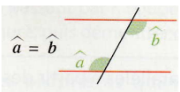
Propriétés **Angles alternes-internes et droites parallèles**

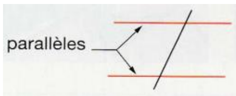
Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes sont égaux.



➡


Réciproquement, si deux droites coupent une sécante en formant des angles alternes-internes égaux, alors ces droites sont parallèles.



➡


Définition On dit que deux triangles sont **égaux** lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur. On dit aussi qu'ils sont **superposables** ou **isométriques**.

Propriétés **Triangles égaux**

¤ Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur **compris** entre deux angles de même mesure, alors ces triangles sont égaux. *(fig. 1)*

¤ Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure **compris** entre deux côtés de même longueur, alors ces triangles sont égaux. *(fig. 2)*

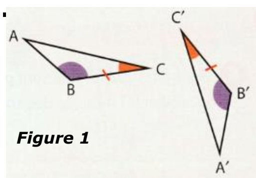


Figure 1

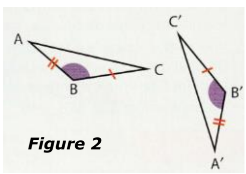
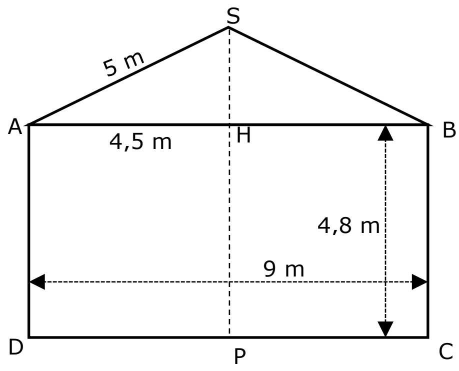


Figure 2

EXERCICE TYPE 3

On poursuit l'étude de la maison précédente (ex-type 2) dont on rappelle une représentation de la vue de droite. On souhaite installer des panneaux photovoltaïques sur le pan sud du toit (grisé).

Déterminer une valeur arrondie au décimètre près de la hauteur réelle de la maison (du pied P de celle-ci jusqu'au sommet S du toit).



Solution

Pour déterminer la hauteur de la maison, il faut d'abord connaître la hauteur SH du toit.

Dans le triangle ASH rectangle en H, ***Données***
on peut appliquer le théorème de Pythagore : ***Leçon utilisée***

$SH^2 + AH^2 = AS^2$ ***Conclusion du théorème***

$SH^2 + 4{,}5^2 = 5^2$

$SH^2 + 20{,}25 = 25$

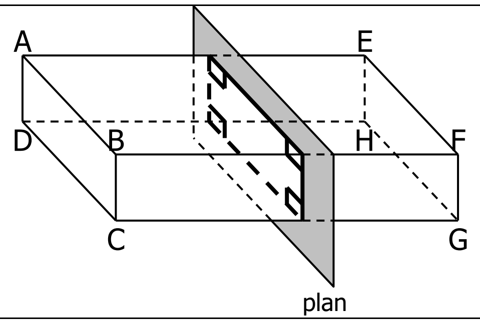
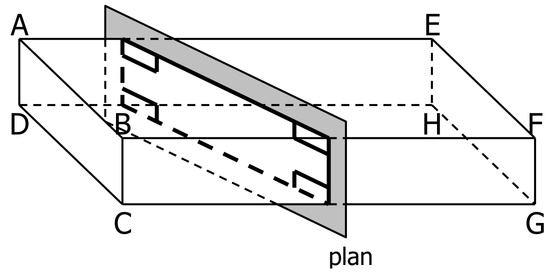
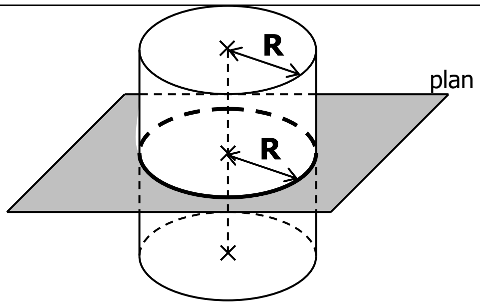
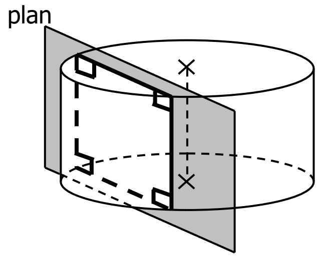
$SH^2 = 25 - 20{,}25 = 4{,}75$ ***Calculs et conclusion*** (avec la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice).

d'où : $SH = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}2$ m

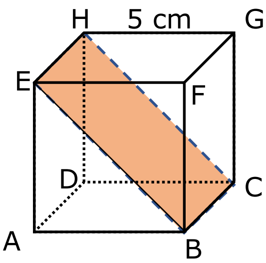
La hauteur de la maison est donc environ de : SP = SH + HP ≈ 2,2 + 4,8 = **7 m**.

IV. Sections planes de pavé droit et de cylindre

<u>*Figures-clés (admises)*</u>

	
La section d’un pavé droit par un plan parallèle à une face est un **rectangle**.	La section d’un pavé droit par un plan parallèle à une arête est un **rectangle**.
	
La section d’un cylindre par un plan parallèle aux bases est un **cercle de même rayon**.	La section d’un cylindre par un plan parallèle à l’axe de révolution est un **rectangle**.

EXERCICE TYPE 4 **Section d’un cube**



On a coupé le cube ci-contre par le plan parallèle à l’arête [AD] passant par les points A et F.

1. Préciser la nature du quadrilatère EBCH.

2. Quelles sont ses dimensions ? Justifier.
Si besoin, on donnera une valeur arrondie au mm près.

<u>*Solution*</u>

1. D’après la leçon, la section d’un pavé droit par un plan parallèle à une face est un rectangle.
Donc le quadrilatère EBCH est un **rectangle**.
(*« Les cubes font partie de la famille des pavés droits… »*)

2. La largeur de ce rectangle EBCH a la même dimension que l’arête du cube [BC].
Et comme dans un cube, toutes les arêtes ont la même longueur, **la largeur de ce rectangle est EH = BC = 5 cm**.

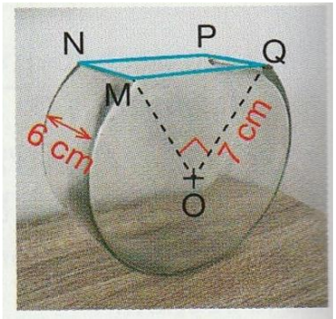
La longueur [EB] de ce rectangle est aussi la diagonale de la face de devant, c’est-à-dire du carré ABFE.
Dans le triangle rectangle ABE, on peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$EB^2 = AB^2 + AE^2$

$EB^2 = 5^2 + 5^2 = 50$

d'où : $EB = \sqrt{50} \approx 7{,}1$ cm. **La longueur de ce rectangle est donc d’environ 7,1 cm**.

EXERCICE TYPE 5 **Section d'un cylindre**



Pour obtenir le vase en verre ci-contre, on a coupé le cylindre par un plan parallèle à son axe comme indiqué ci-contre.

Calculer la valeur exacte du périmètre du rectangle MNPQ.

Solution

D'après la leçon, la section d'un cylindre par un plan parallèle à son axe est un rectangle.
Le quadrilatère MNPQ est donc bien un **rectangle**.

Comme indiqué sur la figure, sa largeur mesure **MN = 6 cm**.

D'après le codage de la figure, le triangle MOQ est rectangle en O.
On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans ce triangle :

$MQ^2 = MO^2 + OQ^2$

$MQ^2 = 7^2 + 7^2 = 98$

d'où : $\mathbf{MQ = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}}$ **cm**.

(Attention, l'énoncé demande une valeur exacte, et la calculatrice donne une valeur exacte…)

Le périmètre de ce rectangle MNPQ mesure donc :

$2\times MN + 2\times MQ = 2\times 6 + 2\times 7\sqrt{2} = \mathbf{12 + 14\sqrt{2}}$ **cm**.

V. Volumes d'un pavé droit, d'un cylindre ou d'un prisme droit

1. Rappel : convertir les unités de longueur, d'aire et de volume

Tableau de conversion des longueurs, aires et volumes

- Longueurs :

1 dm = 10 cm

kilo-	*hecto-*	*déca-*		*déci-*	*centi-*	*milli-*
unité de mille	*centaine*	*dizaine*	*UNITE*	*dixième*	*centième*	*millième*
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
1	**5**	**3**	**4**	**2**	**0**	

- Aires :

1 dm² = 100 cm²

	km²		**hm²**		**dam²**		**m²**		**dm²**		**cm²**		**mm²**

- Volumes :

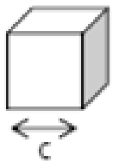
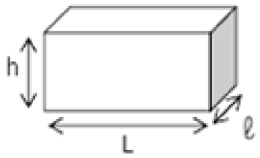
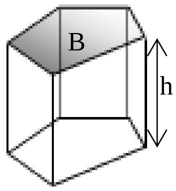
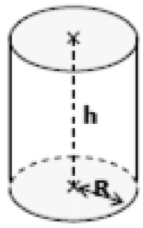
1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³

m³			**dm³**			**cm³**			**mm³**
	hL	**daL**	**L**	**dL**	**cL**	**mL**			
4	**1**	**8**	**0**						
			0	**0**	**1**	**2**			
	3	**4**	**6**	**9**					
		3	**4**	**2**	**0**	**0**			

EXERCICE TYPE 3 Convertir et compléter les pointillés :

- 15,342 **hm** = 1 534, 2 **m** = 153 420 **cm**
- 1,20 **m²** = 12 000 **cm²** ; 500 000 **m²** = 50 **hm²** = 50 **ha**
- 4,18 **m³** = 4 180 **dm³** ; 12 cm³ = 0,012 **dm³**
- 3,469 hL = 346,9 **L** = 3469 dL ; 34,2 **L** = 34,2 **dm³** = 34 200 **cm³** = 34 200 **mL**

2. Rappel : volumes d'un pavé droit, d'un cylindre ou d'un prisme droit

Les formules à connaître et à savoir appliquer			
Cube  • Volume = $\mathbf{c^3}$	**Pavé droit** *(parallélépipède rectangle)*  • Volume = $\mathbf{L\times\ell\times h}$ = $L\ell h$	**Prisme droit**  • Volume = B×h = **Bh** *(où B est **l'aire** de la Base)*	**Cylindre** (de révolution)  • Volume = $\boldsymbol{\pi R^2 h}$

EXERCICE TYPE 6

On remplit complètement d'eau un pichet parallélépipèdique dont les dimensions sont 9 cm × 12 cm × 8 cm.

En justifiant votre réponse, dire si l'on peut verser cette eau :

1. dans un bocal de 1 litre ?

2. dans une bonbonne cylindrique de diamètre 12 cm et de hauteur 8 cm ?

Solution

Calculons d'abord le volume de l'eau (qui correspond au volume du pichet parallélépipèdique vu qu'l est totalement rempli) :

$\mathbf{V_{eau}} =$ L×l×h = 12×9×8 = $\mathbf{864\ cm^3}$.

1. Comme 864 cm^3 = 0,864 dm^3 = 0,864 L < 1 L,
on peut verser cette eau dans un bocal de 1 litre.

2. Calculons le volume de la bonbonne cylindrique (R = 12÷2 = 6 cm, h = 8 cm) :

$\mathbf{V_{Cylindre}} = \pi R^2 h = \pi\times 6^2\times 8 = \mathbf{288\pi \approx 905\ cm^3}$

Comme 864 cm^3 < 905 cm^3, on peut également verser le contenu du pichet dans cette bonbonne.