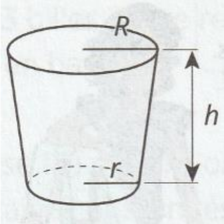
Séquence n°1

UTILISER DES EXPRESSIONS LITTERALES pour COMPARER, CALCULER et RESOUDRE DES PROBLEMES

En mathématiques, on utilise parfois une lettre pour remplacer une grandeur que l'on souhaite étudier ou exploiter. On appelle « **expression littérale** » tout type de calcul dans lequel on utilise une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.



Exemple Le volume d'un seau est donné par l'expression $\frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

où h est la hauteur du seau, r est le rayon du fond du seau et R est le rayon du bord supérieur, avec des mesures exprimées dans la même unité.

I. *Conventions d'écriture dans les expressions littérales*

A savoir Dans une expression littérale, **on peut supprimer le signe « $\times$ »** entre :

- Un nombre et une lettre : $5 \times a = 5a$;
- Deux lettres : $a \times b = ab$;
- Un nombre et une parenthèse : $7\times(d + q) = 7(d + q)$;
- Une lettre et une parenthèse : $a\times(b + c) = a(b + c)$;
- Deux parenthèses : $(9 + t)\times(1 - t) = (9 + t)(1 - t)$
- Deux lettres identiques : $a\times a = a^2$ (on dit « *a au carré* »)
- Trois lettres identiques : $a\times a\times a = a^3$ (on dit « *a au cube* »)

EXERCICE TYPE 1

Calculer les expressions littérales suivantes pour $x = 3$, puis pour $x = 10$.

$A = x^2 - 3x + 4$; $B = \frac{-3x}{x + 2}$; $C = (x-1)\times(x-2)\times(x-3)\times(x-4)\times\ldots\times(x-16)\times(x-17)$

Solution Pour $x = 3$, on a : $A = 3^2 - 3\times3 + 4 = 4$; $B = \frac{-3\times3}{3 + 2} = \frac{-9}{5}$;

$C = 0$ (en effet, comme le facteur $(x-3)$ sera alors égale à 0, Alors tout le produit sera aussi égale à 0…)

Pour $x = 10$, on a : $A = 10^2 - 3\times10 + 4 = 74$; $B = \frac{-3\times10}{10 + 2} = \frac{-30}{12} = \frac{-5}{2}$;

$C = 0$ (en effet, comme le facteur $(x-3)$ sera alors égale à 0, Alors tout le produit sera aussi égale à 0…)

Rappels

- Les carrés à connaître :

$1^2 = \mathbf{1}$	$2^2 = \mathbf{4}$	$3^2 = \mathbf{9}$	$4^2 = \mathbf{16}$	$5^2 = \mathbf{25}$	$6^2 = \mathbf{36}$
$7^2 = \mathbf{49}$	$8^2 = \mathbf{64}$	$9^2 = \mathbf{81}$	$10^2 = \mathbf{100}$	$11^2 = \mathbf{121}$	$12^2 = \mathbf{144}$

- Les racines carrées à connaître :

$\sqrt{\mathbf{1}} = 1$	$\sqrt{\mathbf{4}} = 2$	$\sqrt{\mathbf{9}} = 3$	$\sqrt{\mathbf{16}} = 4$	$\sqrt{\mathbf{25}} = 5$	$\sqrt{\mathbf{36}} = 6$
$\sqrt{\mathbf{49}} = 7$	$\sqrt{\mathbf{64}} = 8$	$\sqrt{\mathbf{81}} = 9$	$\sqrt{\mathbf{100}} = 10$	$\sqrt{\mathbf{121}} = 11$	$\sqrt{\mathbf{144}} = 12$

II. Calculer avec des nombres relatifs

Règle d'addition de deux nombres relatifs

- On détermine le **signe** :
  - on garde le signe du nombre qui a la plus grande valeur (distance à zéro, « le plus lourd »).
- On détermine la **distance à zéro** (« valeur ») :
  - **si** les deux nombres sont de **même signe**, on calcule la **somme** des distances à zéros ;
  - **si** les deux nombres sont de **signes contraires**, on calcule la **différence** entre les distances à zéros.

$+(+7) = 7$
$+(-8) = -8$

Exemples $(-8) + (-1) = -8 - 1 = -9$ *(nombres de même signe)*
$(-5) + (+1) = -5 + 1 = -4$ *(nombres de signes contraires)*
$(-13) + (+19) = -13 + 19 = +6 = 6$ *(nombres de signes contraires)*

Règle de soustraction de deux nombres relatifs

- On transforme la différence en une somme en appliquant la règle suivante :
  - **Soustraire** un nombre revient à **ajouter son opposé**.

$-(+3) = -3$
$-(-9) = +9$

Exemples

$(+5) - (+2)$
$= (+5) + (-2) = 5 - 2$
$= 3$

$(+6) - (-7)$
$= (+6) + (+7) = 6 + 7$
$= +13 = 13$

L'opposé de (+ 2) est (– 2) et l'opposé de (– 7) est (+ 7)

Méthode pour additionner plusieurs nombres relatifs

- On additionne d'abord tous les nombres de même signe pour aller plus vite.

Exemple $-2 + 3 - 1 - 5 + 4 - 10 + 6 = -18 + 13 = -5$

EXERCICE TYPE 2 Effectuer les calculs suivants :

$A = (-9) + (+3)$ $B = (-11) - (-3)$ $C = -2 + 9$ $D = 15 - (+7)$

Solution

$A = (-9) + (+3)$
$= -9 + 3$
$= -\mathbf{6}$

$B = (-11) - (-3)$
$= (-11) + (+3)$
$= -11 + 3 = -\mathbf{8}$

$C = -2 + 9$
$= +7 = \mathbf{7}$

$D = 15 - (+7)$
$= 15 + (-7)$
$= 15 - 7 = \mathbf{8}$

Règle de multiplication ou de division de deux nombres relatifs

- On détermine le **signe** :
  - **si** les deux nombres sont de **même signe**, alors le résultat sera **positif** (**+**)
  - **si** les deux nombres sont de **signe contraire**, alors le résultat sera **négatif** (**–**)
- On détermine la **distance à zéro** (« valeur ») :
  - on multiplie ou divise les distances à zéro.

Exemples Avec deux nombres de ***même signe*** : $(-3)\times(-8) = +24 = 24$
Avec deux nombres de ***signe contraire*** : $(+7)\times(-9) = -63$; $(-15)\div(+3) = -5$

EXERCICE TYPE 3 Calculer : $E = (-6)\times(+9)$ $F = -11\times(-3)$ $G = \dfrac{-28}{-7}$ $H = \dfrac{72}{-8}$

Solution $E = -54$ $F = +33 = 33$ $G = +4 = 4$ $H = -9$

III. Calculer avec des nombres en écriture fractionnaire

REGLE FONDAMENTALE : égalité de deux fractions

- La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie (ou si l'on divise) par un même nombre non nul son numérateur et son dénominateur.

Autrement dit Si **a, b** et **k** représentent des nombres (différents de 0) : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

Exemples $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$; $\frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$; $\frac{-2}{-3} = \frac{-2 \times (-1)}{-3 \times (-1)} = \frac{2}{3}$; $\frac{9}{-5} = \frac{-9}{5} = -\frac{9}{5}$

Règle d'addition et de soustraction de deux fractions

- Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire, **on les transforme pour obtenir un même dénominateur**, puis on additionne (ou soustrait) uniquement les numérateurs (en gardant le dénominateur commun).

Exemples $A = \frac{5}{\mathbf{12}} + \frac{9}{\mathbf{12}} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$; $B = \frac{-5}{8} + \frac{3}{16} = \frac{-5 \times 2}{8 \times 2} + \frac{3}{16} = \frac{-10}{\mathbf{16}} + \frac{3}{\mathbf{16}} = \frac{-7}{16}$

*Ne pas oublier de **simplifier la fraction**…*
…lorsque cela est possible !

EXERCICE TYPE 4 Calculer $C = \frac{8}{25} + \frac{-4}{15}$

Solution ¤ On écrit les multiples de 25 et de 15 pour trouver le **dénominateur commun** :

Multiples de 25 : 25 ; 50 ; **75** ; 100 …

Multiples de 15 : 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; **75** …

¤ On transforme les fractions en fractions de même dénominateur **75** :

$C = \frac{8}{25} + \frac{-4}{15} = \frac{8 \times 3}{25 \times 3} + \frac{-4 \times 5}{15 \times 5} = \frac{24}{75} + \frac{-20}{75} = \frac{4}{75}$.

Règle de multiplication de deux fractions

- Pour calculer le produit de deux fractions, **on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux**, en respectant les règles des signes.

Autrement dit Si **a**, **b**, **c** et **d** sont des nombres (différents de 0) : $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$

Exemples $D = \frac{7}{4} \times \frac{8}{-3} = -\frac{7 \times 8}{4 \times 3} = -\frac{7 \cancel{\times 4} \times 2}{\cancel{4 \times} 3} = -\frac{14}{3}$; $E = -\mathbf{2} \times \frac{-5}{3} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1}} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

*Penser à **simplifier la fraction***
***avant** d'effectuer les produits.*

Règle de division de deux fractions

- **Diviser** par un nombre, c'est **multiplier par son inverse**.

Autrement dit Si **a**, **b**, **c** et **d** sont des nombres (différents de 0) : $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemple $F = -\frac{5}{7} \div \frac{3}{4} = -\frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = -\frac{20}{21}$

EXERCICE TYPE 5 Calculer $G = \frac{6}{-7} \div \frac{9}{35}$

Solution $G = \frac{6}{-7} \div \frac{9}{35} = \frac{6}{-7} \times \frac{35}{9} = -\frac{6 \times 35}{7 \times 9} = -\frac{2 \cancel{\times 3} \times 5 \cancel{\times 7}}{\cancel{7 \times} 3 \cancel{\times 3}} = -\frac{2 \times 5}{3} = -\frac{10}{3}$

*On **transforme la division** en une multiplication par son inverse…*

*On **déterminer le signe** du produit…*

*On **décompose** les nombres pour simplifier la fraction avant de multiplier…*

IV. *Les règles de priorités dans les calculs littéraux*

Règles de priorités dans les calculs

- Dans un calcul avec parenthèses :
  - On effectue **d'abord les calculs entre parenthèses**.
  - S'il y plusieurs parenthèses, on commence par les parenthèses plus « intérieures ».
- Dans un calcul écrit sous forme d'un quotient de la forme $\frac{3{,}9}{2+4}$ ou $\frac{5{,}1+2{,}3}{10}$ ou $\frac{10+2}{2+4}$, il faut **d'abord calculer le « numérateur »** et/ou **le « dénominateur »**.
- Dans un calcul sans parenthèses :
  - il faut **commencer par calculer les carrés** ou **les cubes ;**
  - on effectue ensuite **en priorité les multiplications et les divisions** ;
  - si le calcul ne possède que multiplications et divisions, on calcule **de gauche à droite** ;
  - si le calcul ne possède que additions et soustractions, on calcule **de gauche à droite.**

EXERCICE TYPE 6

Calculer : $N = (-3)\times 2^3$ $P = (-17+9)^2$ $Q = (-3)\times(-7-2)$

$R = \frac{-9-7}{-2+4}$ $S = \frac{-3}{7} + \frac{10}{-21} \times \frac{-2}{15}$

Solution

$N = (-3)\times 2^3$
$N = (-3)\times 8$
$N = -\mathbf{24}$

$P = (-17+9)^2$
$P = (-8)^2$
$P = +64 = \mathbf{64}$

$Q = (-3)\times(-7-2)$
$Q = (-3)\times(-9)$
$Q = +27 = \mathbf{27}$

$R = \frac{-9-7}{-2+4}$
$R = \frac{-16}{+2}$
$R = -\mathbf{8}$

$S = \frac{-3}{7} + \frac{10}{-21} \times \frac{-2}{15}$
$S = \frac{-3}{7} + \frac{2\cancel{\times 5} \times 2}{3\times 7 \times 3\times 5}$
$S = \frac{-3}{7} + \frac{4}{63}$
$S = \frac{-3\times 9}{7\times 9} + \frac{4}{63} = \frac{-27}{63} + \frac{4}{63} = \mathbf{\frac{-23}{63}}$

- Lors d'un calcul littéral, **on doit aussi respecter les mêmes règles de priorités**…

Exemples
- L'expression littérale $(x-3)(2x+1)$ est un produit.
- L'expression littérale $x^2 + 2x$ est une somme.
- L'expression littérale $(x-7)^3$ est un produit.

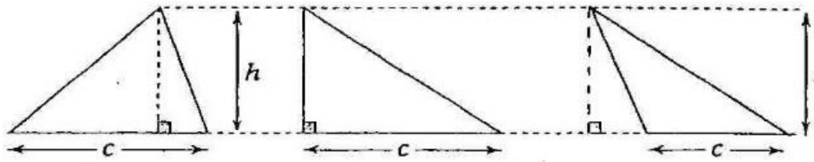
Pour le déterminer, on cherche la dernière opération à effectuer…

V. *Exemples d'utilisation d'expressions littérales : « AIRE et PERIMETRE »*

Les formules à connaître

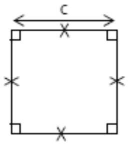
Triangle

c : un côté du triangle
h : la hauteur associée à ce côté



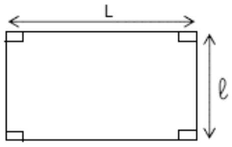
- Aire = $\dfrac{\mathbf{ch}}{\mathbf{2}}$

Carré



- Périmètre = **4c**
- Aire = **c^2**

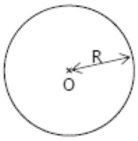
Rectangle



- Périmètre = **2(L+ℓ)** = 2L + 2l
- Aire = **L×ℓ**

Cercle et disque

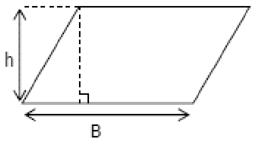
R : rayon



- Périmètre du cercle = **$2\pi R$**
- Aire du disque = **πR^2**

Les formules à savoir retrouver (et à connaître)…

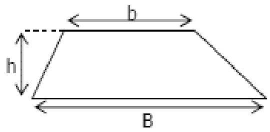
Parallélogramme



c : un côté du parallélogramme
h : la hauteur associée à ce côté

- Aire = **ch**

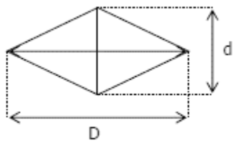
Trapèze



B : grande base
b : petite base
h : la hauteur associée aux bases

- Aire = (B+b)h÷2 = $\dfrac{\mathbf{(B+b)h}}{\mathbf{2}}$

Losange



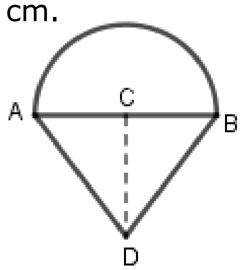
D : grande diagonale
d : petite diagonale

- Aire = Dd÷2 = $\dfrac{\mathbf{Dd}}{\mathbf{2}}$

EXERCICE TYPE 7

On considère la figure ci-contre. On précise que : AB = 1,8 cm et CD = 1,2 cm.

Calculer une valeur approchée, au centième près, de l'aire de cette figure.



Solution

Calculons l'aire du demi-disque de rayon R = 0,9 cm :

$\pi R^2 \div 2 = \pi \times AC^2 \div 2 = \pi \times 0{,}9^2 \div 2 = 0{,}405\pi \approx 1{,}27$ cm².

Calculons l'aire du triangle ABD :

$\dfrac{ch}{2} = \dfrac{AB \times CD}{2} = \dfrac{1{,}8 \times 1{,}2}{2} = 1{,}08$ cm².

On donne une valeur exacte, puis une valeur approchée.

L'aire de cette figure est donc environ de : 1,27 + 1,08 = 2,35 cm².

VI. *Rendre une fraction irréductible*

Définition Une fraction est **irréductible** lorsque le numérateur et le dénominateur n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Autrement dit Une fraction irréductible est une fraction que l'on ne peut pas « simplifier ».

Rendre une fraction irréductible, c'est donc la transformer en une fraction « plus simple »…

EXERCICE TYPE 8 Rendre les fractions suivantes irréductibles : $\frac{66}{30}$; $\frac{12}{51}$ et $\frac{140}{340}$

Solution

- Pour repérer facilement les simplifications possibles, on décompose le numérateur et le dénominateur en produit pour pouvoir utiliser la règle fondamentale :

$$\frac{66}{30}=\frac{6\times11}{6\times5}=\frac{\mathbf{11}}{\mathbf{5}}\ ;\ \frac{12}{51}=\frac{3\times4}{3\times17}=\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{17}}\ ;\ \frac{140}{340}=\frac{14\times10}{34\times10}=\frac{14}{34}=\frac{2\times7}{2\times17}=\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{17}}$$

Pour décomposer un nombre entier, il est important de connaître les critères de divisibilité.

Critères de divisibilité (à connaître par cœur)

Un nombre entier est :

¤ ***divisible par 2*** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
¤ ***divisible par 5*** si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
¤ ***divisible par 10*** si son chiffre des unités est 0 ;
¤ ***divisible par 3*** si la somme de ces chiffres est divisible par 3 ;
¤ ***divisible par 9*** si la somme de ces chiffres est divisible par 9.

Exemples Parmi les entiers suivants : 19 ; 25 ; 27 ; 40 ; 132 ; 133 ; 246 ; 2 385 ; 17 124

¤ les entiers divisibles par 2 sont : 4**0** ; 13**2** ; 24**6** ; 17 12**4**
¤ les entiers divisibles par 5 sont : 2**5** ; 4**0** ; 2 38**5**
¤ l'entier divisible par 10 est : 4**0**

1+7+1+2+4 = 15
et 15 est dans la table de 3…

¤ les entiers divisibles par 3 sont : 27 ; 132 ; 246 ; 2 385 ; 17 124
¤ les entiers divisibles par 9 sont : 27 ; 2 385

2+3+8+5 = 18 et 18 est dans la table de 9.

EXERCICE TYPE 9 Parmi les codes à quatre chiffres 2205, 3564, 4850 et 8730, y-a-t-il un nombre pair divisible à la fois par 5 et 9 ?

Solution

Les nombres pairs sont 3 564, 4 850 et 8 730 car ils se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8.

Parmi ces nombres, ceux qui sont divisibles par 5 sont 4 850 et 8 730.

Comme 4+8+5+0=17 et 8+7+3+0=18, 4 850 n'est pas divisible par 9, mais 8 730 est donc aussi divisible par 9.

8 730 est donc le seul nombre pair divisible par 5 et par 9.