Fiche n°11

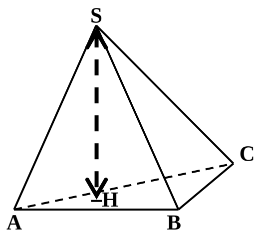
REPRESENTER ET SE REPERER DANS L'ESPACE

I. Pyramides

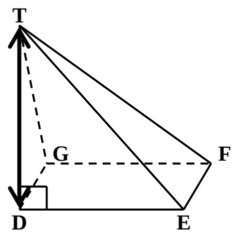
Définition Une **pyramide** de **sommet principal** S est un solide composé de :
- un **sommet** ;
- une **base** polygonale (triangle, quadrilatère, hexagone…) ne contenant pas le sommet ;
- des **faces latérales** triangulaires qui ont pour sommet commun S.

La **hauteur** d'une pyramide est le segment [SH] perpendiculaire au plan de la base, où H est un point de ce plan.

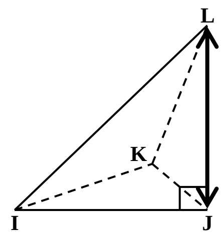
Exemples



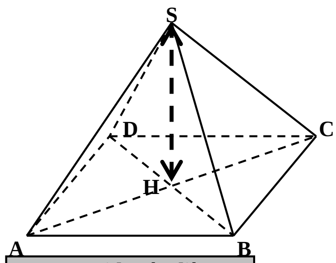
Pyramide à base triangulaire



Pyramide à base rectangulaire, dont une arête est la hauteur.



Pyramide à base triangulaire, dont une arête est la hauteur.



Pyramide régulière à base carrée

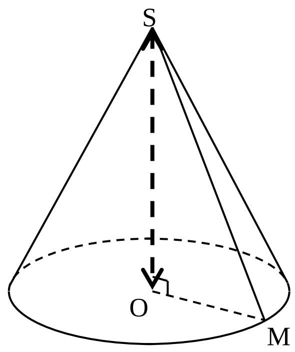
SOMMET PRINCIPAL	S	T	L	S
BASE	ABC	DEFG	IJK	ABCD
FACES LATERALES	3 faces latérales : ABS, BCS et ACS	4 faces latérales : DET, EFT, FGT et GDT	3 faces latérales : IJL, JKL et KIS	4 faces latérales : ABS, BCS, CDS et ADS
HAUTEUR	[SH]	[TD]	[LJ]	[SH]

II. Cônes de révolution

Définition

Un **cône de révolution** de **sommet** S est un solide composé de :
- une **base** en forme de disque ;
- un **sommet** situé sur la perpendiculaire à la base passant par son centre ;
- une **surface latérale**.

La **hauteur** d'un cône est le segment [SO] perpendiculaire à la base et passant par le centre O.



Remarque

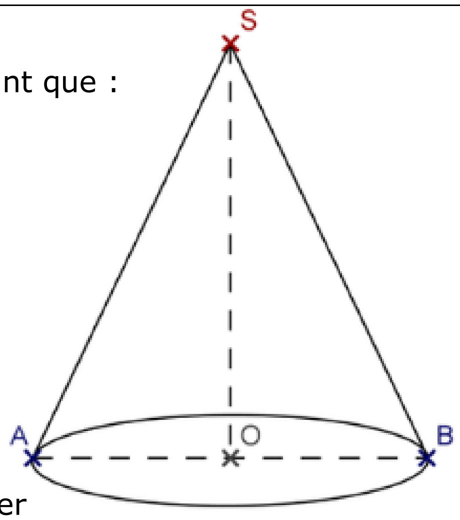
Dans le cône représenté ci-contre, le triangle SOM est un triangle rectangle en O : selon les données du problème, on peut utiliser le théorème de Pythagore pour trouver une longueur manquante dans ce triangle rectangle…

III. *De l'espace au plan : comprendre et analyser des situations représentées en perspective cavalière*

EXERCICE TYPE 1 Raisonner dans l'espace

Déterminer le volume du cône de révolution ci-contre sachant que :
- le diamètre [AB] de la base mesure 8 cm ;
- la longueur [SA] mesure 7 cm.

Donner une valeur arrondie du volume au cm³ près.



Solution

- La formule du volume de ce cône est :

$$\mathbf{V} = \frac{B \times h}{3} = \frac{\pi R^2 \times h}{3} = \frac{\boldsymbol{\pi \times AO^2 \times SO}}{\mathbf{3}}$$

Pour pouvoir calculer ce volume, il nous faut donc déterminer la longueur du rayon [AO] et la hauteur [SO].

- **Rayon de la base du cône** : $\mathbf{AO} = \frac{AB}{2} = \frac{8}{2} = \mathbf{4\ cm}$.

- **Hauteur du cône** :

Comme [SO] est une hauteur du cône, le triangle ASO est rectangle en O.

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$SA^2 = OA^2 + OS^2$, d'où : $7^2 = 4^2 + SO^2$

$49 = 16 + SO^2$

$SO^2 = 49 - 16$

$SO^2 = 33$

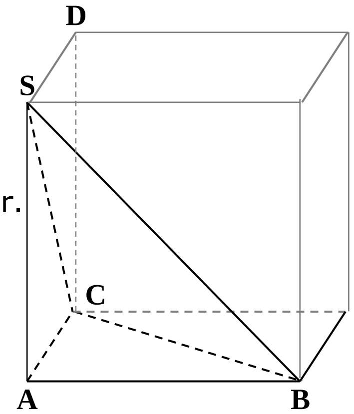
$\mathbf{SO} = \sqrt{33}\ \mathbf{cm}$

- On peut donc calculer le volume du cône :

$$\mathbf{V} = \frac{\pi \times AO^2 \times SO}{3} = \frac{\boldsymbol{\pi \times 4^2 \times \sqrt{33}}}{\mathbf{3}} \approx \mathbf{93\ cm^3}.$$

EXERCICE TYPE 2 Représenter l'espace : une pyramide dans un cube…

Dans un petit cube en bois de côté 6 cm, on a découpé une pyramide ABCS comme ci-contre.



1. Construire, en vraie grandeur, la face SAC de cette pyramide.

2. a. Quelle est la nature de la face BCS de cette pyramide ? Justifier.

b. A l'aide de la figure réalisée à la question **1.** et <u>sans calcul</u>, construire en vraie grandeur la face BCS de cette pyramide.

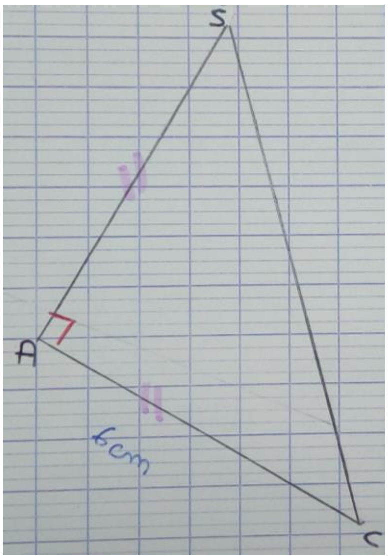
3. Calculer le volume de la pyramide ABCS.

Solution

1. Le triangle SAC est en fait la moitié de la face SACD qui est carrée.

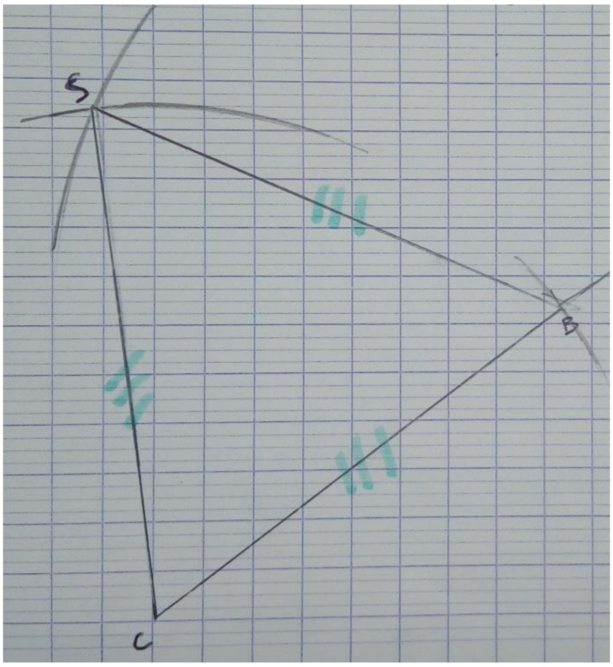
Le triangle SAC est donc un triangle rectangle en A.

A l'aide des remarques précédentes, on obtient la construction ci-contre :



2. a. Les côtés [SC], [SB] et [BC] du triangle BCS sont en fait des diagonales de faces carrées identiques du cube : ces côtés ont donc tous la même longueur et **le triangle BCS est donc équilatéral**.

b. On doit donc construire, avec les instruments, le triangle équilatéral BCS. Pour cela, **utilisons le compas pour reporter la longueur SC** obtenue sur la figure réalisée à la question **1.**.
On obtient alors la construction ci-dessous :



3. Avant de calculer le volume de la pyramide ABCS, il faut déjà repérer convenablement la base et la hauteur associée. Mais comme la pyramide est un morceau du cube, on peut voir que le côté [SA] est perpendiculaire au triangle ACB, et donc que la hauteur [SA] est associée à la base ACB dont il faut d'abord calculer l'aire.

Aire du triangle ACB (base) : $\text{Aire(ACB)} = \dfrac{\text{B x h}}{2} = \dfrac{\text{AB x AC}}{2} = \dfrac{6 \text{ x } 6}{2} = 18 \text{ cm}^2$.

Volume de la pyramide : $\mathbf{V} = \dfrac{\text{B x h}}{3} = \dfrac{\text{Aire(ACB) x SA}}{3} = \dfrac{18 \text{ x } 6}{3} = \mathbf{36\ cm^3}$.

Remarque : attention de ne pas confondre la formule de l'aire d'un triangle avec la formule du volume d'un triangle…

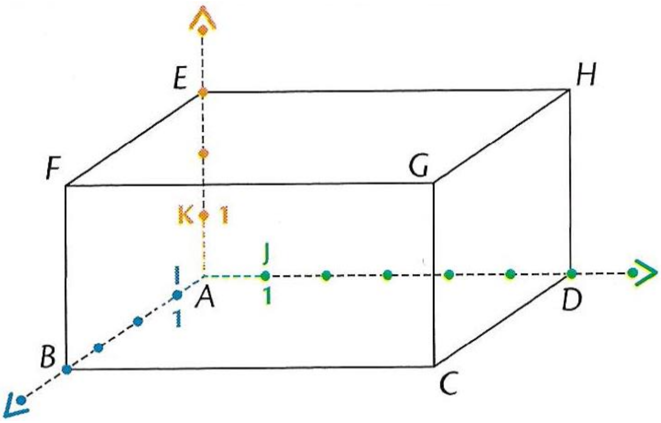
IV. *Pour se repérer sur un pavé droit : abscisse, ordonnée et altitude*

Sur un pavé droit, on peut se repérer en prenant un des sommets (l'**origine** du repère) et utilisant les trois arêtes issues de ce sommet (les trois **axes** du repère) en notant l'**abscisse** et l'**ordonnée** sur la base du pavé et l'**altitude** sur la troisième arête.

<ins>*Exemple*</ins>

Le sommet A est l'origine.
La demi-droite [AI) est l'axe des abscisses.
La demi-droite [AJ) est l'axe des ordonnées.
La demi-droite [AE) est l'axe des altitudes.

Dans ce repère, les coordonnées des points A, B, D, E, F et G sont :
A(0 ; 0 ; 0), B(4 ; 0 ; 0), D(0 ; 6 ; 0)
E(0 ; 0 ; 3), F(4 ; 0 ; 3), G(4 ; 6 ; 3)

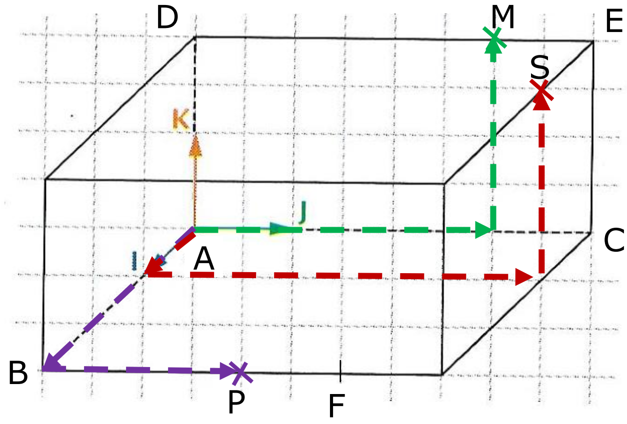


EXERCICE TYPE 3

On considère le pavé droit ci-contre, en prenant :
- L'origine est le sommet A ;
- Les axes sont portés par les demi-droites [AI), [AJ) et [AK) avec AI = AJ = AK = 1.

1. Déterminer les coordonnées des points B, C, D, E et F.

2. Sur ce pavé, placer les points suivants : M(0 ; 3 ; 2), P(3 ; 2 ; 0) et S(1 ; 4 ; 2).



<ins>*Solution*</ins>

1. Les coordonnées des points B, C, D, E et F sont :
B(3 ; 0 ; 0), C(0 ; 4 ; 0), D(0 ; 0 ; 2), E(0 ; 4 ; 2) et F(3 ; 3 ; 0).

2. Voir les points M(0 ; 3 ; 2), P(3 ; 2 ; 0) et S(1 ; 4 ; 2) placés sur la représentation ci-dessus.