Fiche n°10
CALCULER DES GRANDEURS

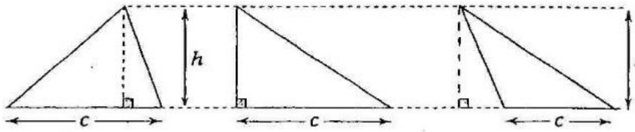
I. *Aires et périmètres*

Les formules à connaître

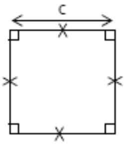
Triangle

c : un côté du triangle
h : la hauteur associée à ce côté

• Aire = $\mathbf{\dfrac{ch}{2}}$



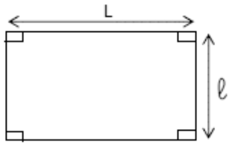
Carré



• Périmètre = **4c**

• Aire = **c²**

Rectangle

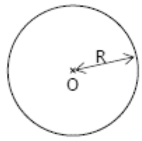


• Périmètre = **2(L+ℓ)** = 2L + 2l

• Aire = **L ℓ**

Cercle et disque

R : rayon

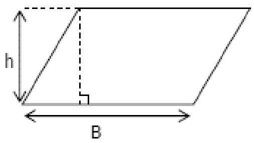


• Périmètre du cercle = $\mathbf{2\pi R}$

• Aire du disque = $\mathbf{\pi R^2}$

Les formules à savoir retrouver…

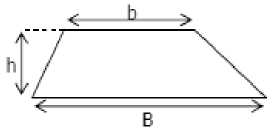
Parallélogramme



c : un côté du parallélogramme
h : la hauteur associée à ce côté

• Aire = **ch**

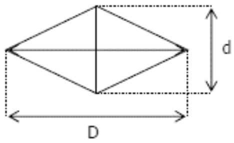
Trapèze



B : grande base
b : petite base
h : la hauteur associée aux bases

• Aire = (B+b)h÷2 = $\mathbf{\dfrac{(B+b)h}{2}}$

Losange



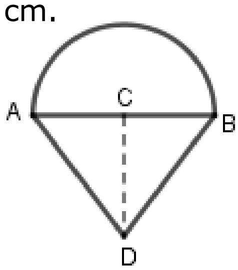
D : grande diagonale
d : petite diagonale

• Aire = Dd÷2 = $\mathbf{\dfrac{Dd}{2}}$

EXERCICE TYPE 1

On considère la figure ci-contre. On précise que : AB = 1,8 cm et CD = 1,2 cm.

Calculer une valeur approchée, au centième près, de l'aire de cette figure.



Solution

Calculons l'aire du demi-disque de rayon R = 0,9 cm :

$\pi \mathbf{R^2} \div 2 = \pi \times AC^2 \div 2 = \pi \times 0{,}9^2 \div 2 = 0{,}405\pi \approx 1{,}27$ cm².

Calculons l'aire du triangle ABD :

$\mathbf{\dfrac{ch}{2}} = \dfrac{AB \times CD}{2} = \dfrac{1{,}8 \times 1{,}2}{2} = 1{,}08$ cm².

On donne une valeur exacte, puis une valeur approchée.

L'aire de cette figure est donc environ de : 1,27 + 1,08 = 2,35 cm².

II. Volumes de plusieurs solides vus en 6e et en 5e

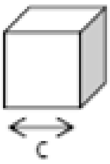
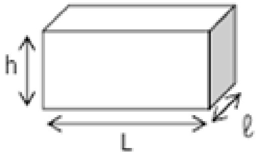
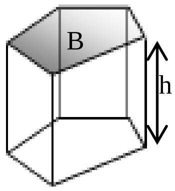
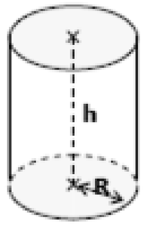
Solides vus en 6e et en 5e			
Cube	**Pavé droit** *(parallélépipède rectangle)*	**Prisme droit**	**Cylindre** (de révolution)
			
• Volume = **c^3**	• Volume = **$L\times\ell\times h$** = $L\ell h$	• Volume = $B\times h$ = **Bh** *(où B est **l'aire** de la Base)*	• Volume = **$\pi R^2 h$**

Tableau de conversion des longueurs, aires et volumes

- Longueurs :

1 dm = 10 cm

kilo-	hecto-	déca-		déci-	centi-	milli-
unité de mille	centaine	dizaine	UNITE	dixième	centième	millième
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
1	**5**	**3**	**4**	**2**	**0**	

- Aires :

1 dm² = 100 cm²

	km²		**hm²**		**dam²**		**m²**		**dm²**		**cm²**		**mm²**
			ha .		**a .**								
							1	**2**	**0**	**0**	**0**		
		5	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**						

- Volumes :

1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³

m³			**dm³**			**cm³**			**mm³**
	hL	**daL**	**L**	**dL**	**cL**	**mL**			
4	**1**	**8**	**0**						
			0	**0**	**1**	**2**			
	3	**4**	**6**	**9**					
		3	**4**	**2**	**0**	**0**			

EXERCICE TYPE 2 Convertir et compléter les pointillés :

- 1**5**,342 **hm** = 1 53**4**, 2 **m** = 153 42**0 cm**
- **1**,20 **m²** = 12 00**0 cm²** ; 500 00**0 m²** = 5**0 hm²** = 5**0 ha**
- **4**,18 **m³** = 4 18**0 dm³** ; 12 cm³ = **0**,012 **dm³**
- 3,469 hL = 34**6**,9 **L** = 3469 dL ; 3**4**,2 **L** = 3**4**,2 **dm³** = 34 20**0 cm³** = 34 20**0 mL**

EXERCICE TYPE 3 Un vase cylindrique de diamètre 12 cm et de hauteur 9 cm peut-il contenir un litre d'eau ?

Solution

Pour calculer le volume **V** du vase, il nous faut le rayon (**R** = 6 cm) et la hauteur (**h** = 9 cm) :

V = $\pi R^2 h = \pi \times 6^2 \times 9 = 324\,\pi$

*On donne une **valeur exacte**, puis une valeur approchée.*

Donc **V** ≈ 1 018 cm³ = 1,018 dm³ = 1,018 L.

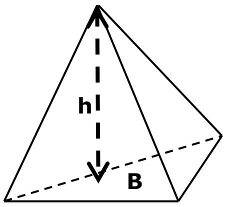
Comme 1,018 L > 1 L, ce vase peut contenir un litre d'eau.

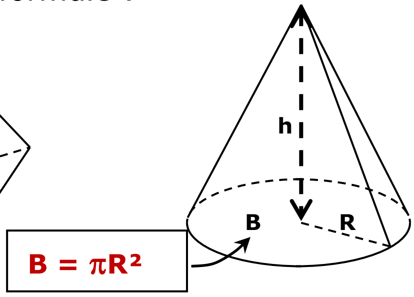
III. Volumes d'une pyramide et d'un cône

On calcule le volume d'une pyramide ou d'un cône grâce à une même formule :

<u>A SAVOIR</u> Le **volume V d'une pyramide** ou **d'un cône** de révolution est égal au tiers du produit de sa ***hauteur* h** par ***l'aire* B** de sa base :

$$V = \frac{B \times h}{3}$$





EXERCICE TYPE 4 Calculer le volume des deux solides suivants :

1. Une pyramide dont la base est un rectangle de dimensions 3 cm x 6 cm et de hauteur 5 cm.
2. Un cône de hauteur 7 cm et dont le diamètre de la base mesure 6 cm (arrondir au cm^3 près).

<u>*Solution*</u>

1. La base est un rectangle de dimensions 3 cm x 6 cm donc son aire est :
   $B = 3 \times 6 = 18\ cm^2$.

   Le volume de la pyramide est donc : $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{18 \times 5}{3} = \mathbf{30\ cm^3}$

2. Le diamètre de la base circulaire est 6 cm donc son rayon mesure 3 cm.

   Le volume de ce cône est donc : $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{\pi R^2 \times h}{3} = \frac{\pi \times 3^2 \times 7}{3} = 21\pi \approx \mathbf{66\ cm^3}$

IV. *Etudier des grandeurs-produits ou des grandeurs-quotients*

1. *Comprendre les grandeurs composées*

La masse (g), la longueur (m), l'intensité (A), la tension (V), le temps (h), etc. sont des grandeurs simples bien connues qui se traduisent chacune par une unité « simple »….

Une **grandeur-produit** est obtenue **en multipliant** deux grandeurs, et une **grandeur-quotient** est obtenue **en divisant** deux grandeurs.

L'unité d'une grandeur composée doit être écrite en cohérence avec les unités utilisées.

EXERCICE TYPE 5 **Exemples de grandeurs composées et d'unités associées**

Relier chaque grandeur composée à l'unité (ou plusieurs) qui convient pour l'exprimer et surligne en jaune les grandeur quotient.

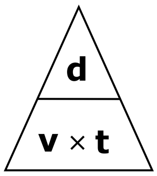
Densité de population •	• 27 m/s
Vitesse •	• 45 m^3
Volume •	• 220 hab/km²
Energie électrique •	• 52 MWh
Aire •	• 50 $km.h^{-1}$
Prix de l'eau potable •	• 32 cm²
Prix du lait •	• 0,375 €/L
	• 1,97 €/m^3

2. Exemples de grandeurs quotients

La **vitesse moyenne v** sur un trajet est le quotient de la distance parcourue **d** par la durée **t** du trajet.

m/s → $\mathbf{v = \dfrac{d}{t}}$ (d en m, t en s)

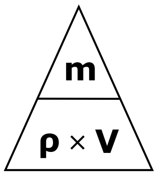
$\mathbf{d = v \times t}$ $\mathbf{t = \dfrac{d}{v}}$



La **masse volumique ρ** d'un solide est le quotient de sa masse **m** par son volume **V**.

kg/m³ → $\mathbf{\rho = \dfrac{m}{V}}$ (m en kg, V en m³)

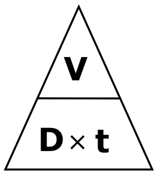
$\mathbf{m = \rho \times V}$ $\mathbf{V = \dfrac{m}{\rho}}$



Le **débit moyen D** d'un tuyau est le quotient du volume **V** d'eau écoulé par la durée **t** d'écoulement.

L/min → $\mathbf{D = \dfrac{V}{t}}$ (V en L, t en min)

$\mathbf{V = D \times t}$ $\mathbf{t = \dfrac{V}{D}}$



EXERCICE TYPE 6

1. Un automobiliste parcourt 175 km en 2h30. Calculer sa vitesse moyenne en km/h.
2. L'Aude a un débit moyen de 44 m³/s. Quel volume d'eau s'écoule en moyenne en 1 h ?
(Pour info, lors de la crue de 1999, le débit de l'Aude a atteint 4 000 m³/s !)
3. La masse volumique de l'or est égale à 19,3 g/cm³ (pour de l'or à 24 carats, pur à 99 %).
Le lingot d'or utilisé dans les transactions entre Banques centrales pèse 12,5 kg.
Quel est le volume de ce lingot d'or (au dixième de cm³ près) ?

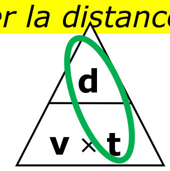
<u>Solutions</u> *Attention, plusieurs autres démarches sont possibles…*

1. ***1ère démarche : avec la formule***

⚠ *<u>Cohérence des unités</u> : pour obtenir la vitesse en km/h, il faut exprimer la distance en km, et le temps en h…*

Unités : ¤ **d** = 175 km ¤ **t** = 2h30 = 2,5 h

La vitesse moyenne de cet automobiliste est : $\mathbf{v} = \dfrac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}} = \dfrac{175}{2,5} = \mathbf{70\ km/h}$.



2ème démarche : avec la proportionnalité

Analyse : déterminer la vitesse moyenne en km/h revient à trouver comme de kilomètres ont été parcourus en 1h. Et comme il y a 5 fois 30 min dans 2h30, et qu'il y a 2 fois 30 min dans 1h :

Si en 2 h 30 min, l'automobiliste a parcouru 175 km,
alors en 30 min, il a parcouru 175 ÷ 5 = 35 km,
et donc en 1h, il a parcouru 35×2 = 70 km. Sa vitesse moyenne est donc **70 km/h**.

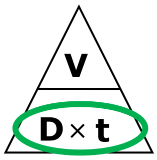
2. ***1ère démarche : avec la formule***

⚠ *<u>Cohérence des unités</u> : le débit étant donné en m³/s, il faut exprimer la durée en s.*

Unités : ¤ **D** = 44 m³/s ¤ **t** = 1 h = 3 600 s

Le volume moyen d'eau écoulé en 1 h est :

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}\times\mathbf{t} = 3\,600 \times 44 = \mathbf{158\,400\ m^3}.$$



2ème démarche : avec la proportionnalité

Analyse : dire que le débit est de 44 m³/s revient à dire qu'il y a 44 m³ d'eau qui s'écoule en 1s… Représentons ces données par un tableau de proportionnalité.

Temps d'écoulement	1 s	1 h = 3 600 s
Volume d'eau écoulé	44 m³	?

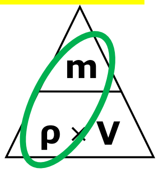
En 1 h, il s'est donc écoulé $44 \times 3\,600 =$ **158 400 m³** d'eau.

3. **1ère démarche : avec la formule**

Cohérence des unités : la masse volumique est donnée en g/cm³, il faut donc exprimer la masse en g.

Unités : ¤ **ρ** = 19,3 g/cm³ ¤ **m** = 12,5 kg = 12 500 g.

Le volume (en m³) de ce lingot d'or est : $\mathbf{V} = \dfrac{\mathbf{m}}{\boldsymbol{\rho}} = \dfrac{12\,500}{19{,}3} \approx$ **647,7 cm³**.



2ème démarche : avec la proportionnalité

Analyse : dire que la masse volumique de l'or est égale à 19,3 g/cm³ revient à dire que 1 cm³ d'or pèse 19,3 g. Représentons ces données par un tableau de proportionnalité.

Volume	1 cm³	?
Masse	19,3 g	12,5 kg = 12 500 g

Le volume d'un lingot d'or de 12,5 kg est donc de $\dfrac{12\,500 \times 1}{19{,}3} \approx$ **647,7 cm³**.

3. Exemples d'une grandeur-produit

EXERCICE TYPE 7

Le trafic d'un camion s'évalue avec une grandeur qui est le produit de la masse transportée en tonnes par le nombre de kilomètres parcourus.

1. Dans quelle unité s'exprime le trafic d'un camion ?
2. Un camion A transporte 7 500 kg de marchandises sur une distance de 850 km.
   Avec un camion B, 6 000 kg sont transportés sur une distance de 1 000 km.
   Lequel de ces deux camions a le trafic le plus important ?

(Pour info, cette notion de trafic permet d'établir une tarification pour les transporteurs, d'évaluer et de comparer les trafics entre les pays, ou entre des moyens de transports différents par exemple…)

Solutions

1. Comme le trafic d'un camion s'évalue avec une grandeur qui est le **produit** de la masse transportée **en tonnes (t)** par le nombre de **kilomètres (km)** parcourus, cette grandeur s'exprime en **t.km**.

2. *Cohérence des unités : le trafic s'exprimant en t.km, il faut donc exprimer les masses en tonnes (t) : 7 500 kg = 7,5 t et 6 000 kg = 6 t.*

   Le **trafic du camion A** est donc de : $7{,}5 \times 850 =$ **6 375 t.km**

   Le **trafic du camion B** est de : $6 \times 1\,000 =$ **6 000 t.km**

   C'est donc **le camion A qui a le trafic le plus important**…