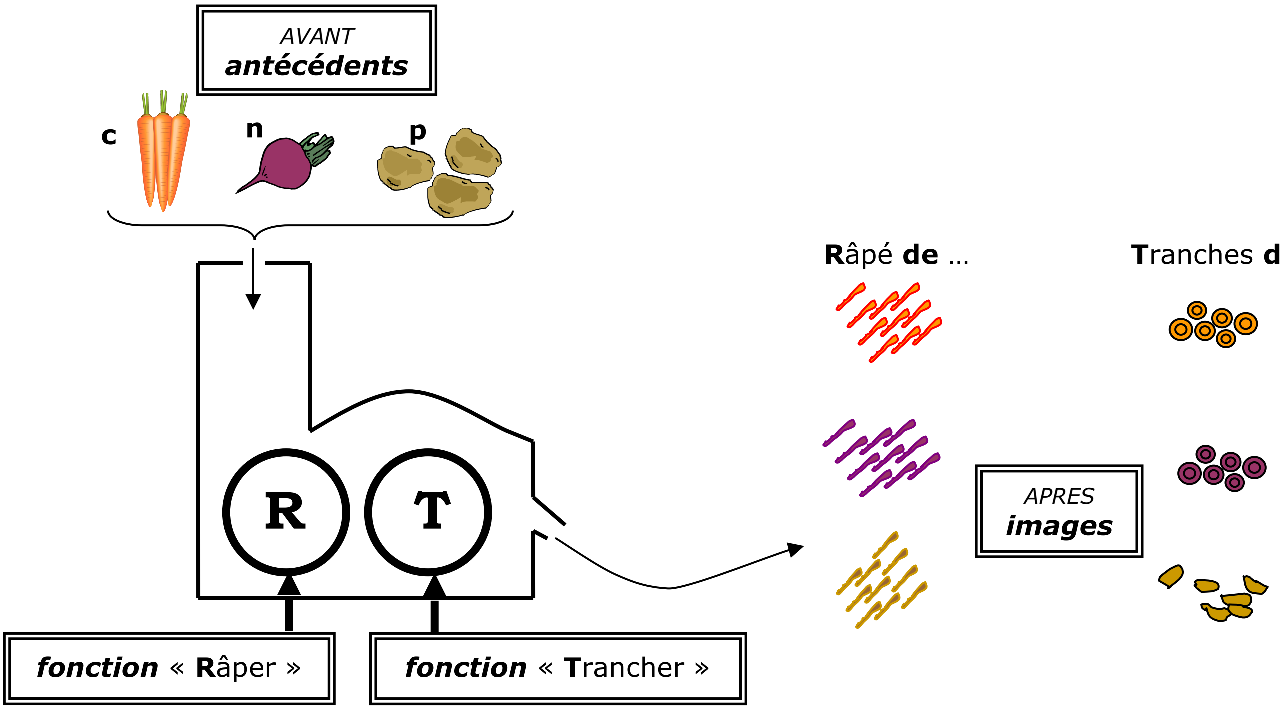
Fiche n°9

COMPRENDRE ET UTILISER LA NOTION DE FONCTION

I. *Pour bien commencer : avec des légumes !*



Notation et vocabulaire

$$\mathbf{R} : \mathbf{c} \mapsto \mathbf{R(c)}$$

nom de la ***fonction***

Départ ***Antécédent***

Arrivée ***Image***

on dit : « **R de c** »

Le nom de la **fonction** précise la transformation que l'on va effectuer…
L'**antécédent** représente « ce que l'on a au départ ».
L'**image** représente « ce que l'obtient à l'arrivée ».

Dans la suite de cette leçon, on considère la fonction ***p*** définie par le programme de calcul suivant :
« Je pense à un nombre.
Je calcule le carré de ce nombre et je soustrais 5 au résultat. »

II. *Du programme de calcul à l'expression algébrique*

EXERCICE TYPE 1 **Comprendre un programme de calcul sur Scratch.**

Voici une copie d'écran d'un programme réalisé avec le logiciel « Scratch ».

1. Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ, alors le programme renvoie -1.

2. Que renvoie le programme si on choisit au départ :
a. le nombre 6 ?
b. le nombre -4 ?

3. Déterminer deux nombres qu'il faut choisir au départ pour que le programme renvoie 4.

4. Si on note x le nombre de départ, exprimer, en fonction de x, le résultat que le programme va afficher pendant 2 secondes.

<u>*Solution*</u>

1. Appliquons le programme Scratch avec 2 comme nombre de départ :
Commande 5 : $2\times2 = 2^2 = 4$
Commande 6 : $4 - 5 = -1$
Si on choisit 2 comme nombre de départ, alors **le programme renvoie bien -1**.

2. a. Avec le nombre 6, on a : $6^2 - 5 = 36 - 5 = \boxed{\mathbf{31}}$
b. Avec le nombre -4, on a : $(-4)^2 - 5 = 16 - 5 = \boxed{\mathbf{11}}$

3. Attention, dans cette question, 4 est le résultat obtenu, c'est-à-dire l'image…
Pour trouver le nombre manquant, effectuons le programme à l'envers :
Commande 6 : $4 + 5 = 9$ (« Le contraire d'une soustraction est une addition… »)
Commande 5 : $\sqrt{9} = 3$ (« Le contraire d'un carré est une racine carrée… »)
Pour obtenir 4, on peut alors choisir **3 ou -3**.
Vérification : $3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$ et $(-3)^2 - 5 = 9 - 5 = 4$

4. Si on note x le nombre de départ, alors le résultat que le programme va afficher pendant 2 secondes sera : $\mathbf{x^2 - 5}$

<u>Notation et expression</u>

$$\boldsymbol{p} : x \mapsto x^2 - 5$$ *ou encore :* $$\boldsymbol{p}(x) = x^2 - 5$$

p *: nom de la* ***fonction***

x *: variable du départ* ***Antécédent***

$\boldsymbol{p}(x)$ *: nombre d'arrivée*
Image de x par la fonction p

Et on dit : « la fonction ***p*** qui à x associe le nombre $x^2 - 5$. »

EXERCICE TYPE 2 **Déterminer par le calcul une image, ou un antécédent.**

On considère la fonction $\boldsymbol{p}$ définie par : $\boldsymbol{p : x \mapsto x^2 - 5}$

1. Calculer l'<u>image</u> de 4 par la fonction $\boldsymbol{p}$.

2. Déterminer un <u>antécédent</u> de 7 par cette fonction $\boldsymbol{p}$.

On remplace $\boldsymbol{x}$ par **4**

<u>Solution</u>

1. Calculons l'image de 4 par la fonction $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{p}(4) = 4^2 - 5 = 16 - 5 = \mathbf{11}$.

L'image de 4 par la fonction **p** est **11**.

2. Déterminer un <u>antécédent</u> de 7 par cette fonction $\boldsymbol{p}$ revient à chercher un nombre $\boldsymbol{x}$ tel que $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = 7$:

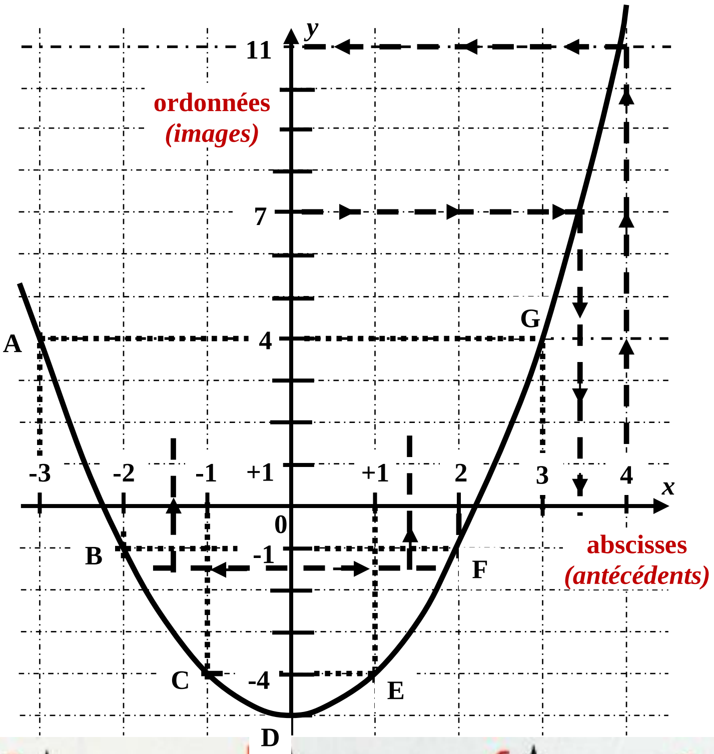
$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = 7$$
$$\boldsymbol{x}^2 - 5 = 7$$
$$\boldsymbol{x}^2 = 12$$
$$\boldsymbol{x} = \sqrt{12}$$

Une égalité dans laquelle on cherche un nombre inconnu s'appelle une **équation**.

$\boldsymbol{x} = \sqrt{12}$ est un antécédent de 7 par la fonction $\boldsymbol{p}$.

III. *Du tableau de valeurs à la représentation graphique*

Dans un repère, on peut obtenir une **représentation graphique** d'une fonction à l'aide d'un **tableau de valeurs**.



Exemple Avec la fonction $\boldsymbol{p} : x \mapsto x^2 - 5$

x	-3	-2	-1	0	$\mathbf{1}$	2	3
$\boldsymbol{p}(x)$	4	-1	-4	-5	$\mathbf{-4}$	-1	4
point	A	B	C	D	**E**	F	G

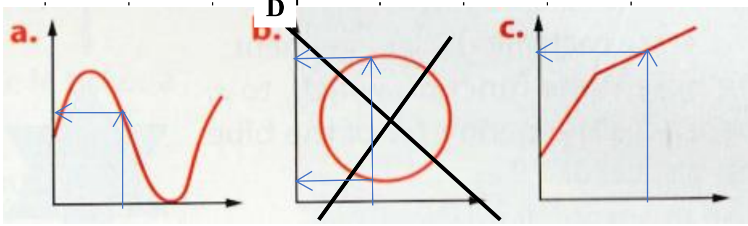
$\boldsymbol{p}(\mathbf{1}) = \mathbf{1}^2 - 5 = 1 - 5 = \mathbf{-4}$

donc le point **E** de coordonnées **(1 ; –4)** appartient à la représentation graphique de la fonction ***p***.

Exemples et contre-exemple

Les figures **a.** et **c.** sont des représentations graphiques de fonctions.

La figure **b.** ne représente pas une fonction : en effet, avec une fonction, un nombre antécédent ne peut avoir qu'une seule image…



EXERCICE TYPE 3 **Déterminer graphiquement une image, ou des antécédents…**

On considère la fonction ***p*** définie et représentée ci-dessus.

1. Déterminer graphiquement l'image de 4 par la fonction ***p***.
2. Déterminer graphiquement un antécédent de 7 par la fonction ***p***.
3. D'après le graphique, combien (–3) a-t-il d'antécédents ?

Solution

1. *Méthode :* *On cherche l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 7 en indiquant par des pointillés notre lecture graphique.*

   Graphiquement, l'image de 4 par la fonction ***p*** est **approximativement 11**.

2. *Méthode :* *On cherche l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 en indiquant par des pointillés notre lecture graphique.*

   Graphiquement, un antécédent de 7 par la fonction ***p*** est **environ 3,4**.

3. D'après le graphique, (–3) a deux antécédents qui sont **à peu près –1,4** et **1,4**.

Remarques

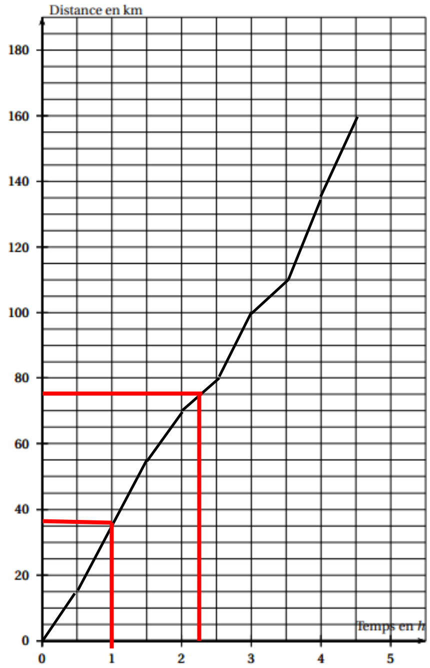
¤ Une lecture graphique ne permet d'obtenir que des **valeurs approchées**…
Pour déterminer une valeur exacte, il convient d'utiliser le calcul : voir exercice type 2.

¤ Un nombre a **parfois plusieurs antécédents possibles** : attention, de ne pas en oublier lors des lectures graphiques…

EXERCICE TYPE 4 **Un exemple de situation concrète avec un graphique.**

Le 17 juillet 2016, une spectatrice regarde l'étape « Bourg-en-Bresse / Culoz » du Tour de France. Elle note, toutes les demi-heures, la distance parcourue par le cycliste français Thomas Vœckler qui a mis 4 h 30 min pour parcourir cette étape de 160 km ; elle oublie seulement de noter la distance parcourue par celui-ci au bout de 1 h de course.
Elle obtient le tableau suivant :

Temps (en heures)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
Distance (en km)	0	15	…	55	70	80	100	110	135



1. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 2 h 30 min ?
2. Montrer qu'il a parcouru 30 km lors de la troisième heure de course.
3. A-t-il été plus rapide lors de la troisième ou bien lors de la quatrième heure de course ?
4. Sur le graphique ci-contre, placer les 9 points du tableau (sans le point d'abscisse 1 puisque l'on ne connaît pas son ordonnée), et, avec votre règle, relier les points…
5. A partir de la représentation graphique obtenue, déterminer, par lecture graphique :
   a. le temps qu'il a mis pour parcourir 75 km ;
   b. la distance parcourue au bout de 1 h de course.

Solution

1. Comme 2h 30 min = 2,5h, la distance parcourue a été de 80 km.
2. Le troisième heure est entre 2h et 3h : il a donc bien parcouru 100 – 70 = 30 km.
3. Lors de la quatrième heure de course, il a parcouru 135–100 = 35 km, c'est-à-dire plus que lors de la troisième heure.
4. Voir graphique…
5. Par lecture graphique :
   a. Il a mis environ 2,25 h = 2 h 15 min (deux heures et quart) pour parcourir 75 km.
   b. Au bout de 1 h, il a parcouru 35 km environ.

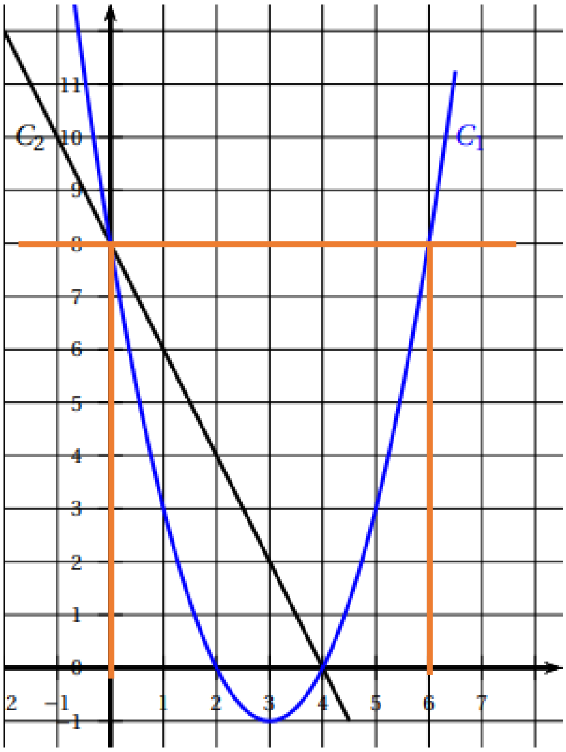
IV. Avec un tableur

EXERCICE TYPE 5

Les représentations graphiques C_1 et C_2 de deux fonctions *f* et *g* sont données dans le repère ci-dessous.
La feuille de calcul ci-dessous permet de calculer des images par les fonctions *f* et *g*.

SOMME | =-2*B1+8

	A	B	C	D	E	F	G
1	*x*	-2	-1	0	1	2	3
2	*f(x)*	=-2*B1+8					
3	*g(x)*						



1. **a.** Calculer l'image de -2 par la fonction *f*.
b. On complète la ligne 2 de cette feuille de calcul par recopie automatique.
Quelle formule sera alors dans la cellule C2 ?
c. Compléter les cellules C2 à G2 de cette feuille de calcul par les nombres manquants.
d. Expliquer pourquoi la représentation graphique la fonction *f* est la courbe C_2.
e. Exprimer en fonction de *x* l'expression de *f*(*x*).
f. Déterminer une valeur exacte de l'antécédent de 5 par la fonction *f*.

2. La fonction *g* est définie par $g(x) = x^2 - 6x + 8$.
a. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule B3 avant de l'étirer vers la droite jusqu'à G3 ?
b. Compléter les cellules B3 à G3 de cette feuille de calcul par les nombres manquants.
c. D'après la question **1.d.,** la représentation graphique de la fonction *g* est la courbe C_1 . *Déterminer* graphiquement deux antécédents de 8 par la fonction *g*.
d. Vérifier par le calcul que les lectures obtenues à la question **2.c.** sont bien exactes.

3. Voici trois affirmations. Qu'en pensez-vous ? Vrai ou fausse ? Pourquoi ?
Affirmation n°1 : L'image de 5 par la fonction *f* est $-1{,}9$.
Affirmation n°2 : L'antécédent de 3 par la fonction *g* est -1.
Affirmation n°3 : $f(4) = g(4)$.

Solution

1. **a.** $f(-\mathbf{2}) = -2\times(-\mathbf{2}) + 8 = 4 + 8 = 12$. L'image de -2 par la fonction *f* est **12**.
b. Par recopie automatique, la formule dans la cellule C2 sera : **=–2*C1+8**
c. Voir la ligne 2 de la feuille de calcul ci-après.

SOMME | =B1^2-6*B1+8

	A	B	C	D	E	F	G
1	*x*	-2	-1	0	1	2	3
2	*f(x)*	12	10	8	6	4	2
3	*g(x)*	=B1^2-6*B1+8	15	8	3	0	-1

d. D'après les questions précédentes, **le point de coordonnées (2 ; 4)** appartient à la représentation graphique de f : c'est donc la courbe C_1.

e. En fonction de x, on a l'expression : $\boldsymbol{f(x) = -2x + 8}$

f. D'après le graphique, il semble que l'antécédent de 5 par la fonction f soit 1,5.
Vérifions par le calcul : $f(1,5) = -2\times1,5 + 8 = -3 + 8 = 5$.
Une valeur exacte de l'antécédent de 5 par la fonction f est bien **1,5**.

2. a. On peut saisir dans la cellule B3 la formule : **=B1^2–6*B1+8**

b. Voir la ligne 3 de la feuille de calcul ci-dessus.

c. Graphiquement, 8 semble avoir deux antécédents par la fonction g : $x = 0$ et $x = 6$.

d. Vérification par le calcul : $g(0) = 0^2 - 6\times0 + 8 = 8$ et $g(0) = 6^2 - 6\times6 + 8 = 8$.

3. *Affirmation n°1* : L'image de 5 par la fonction f est $-1,9$.
Sur le graphique, on peut penser que cette affirmation est vraie en prolongeant la droite.
Par le calcul, on a : $f(5) = -2\times5 + 8 = -10 + 8 = -2$
Cette affirmation est donc fausse car l'image de 5 par la fonction f est -2.

Affirmation n°2 : L'antécédent de 3 par la fonction g est -1.
Graphiquement, l'antécédent de 3 par la fonction g est environ 1 mais ne peut pas être égal à -1. **Cette affirmation est donc fausse** : c'est en fait l'image de 3 par la fonction g qui est égale à -1.

Affirmation n°3 : $f(4) = g(4)$.
Dire que « $f(4) = g(4)$ » signifie que les images de 4 par les fonctions f et g sont égales.
Cela semble vrai sur le graphique où il semble que $f(4) = g(4) = 0$.
Vérifions par le calcul : $f(4) = -2\times4 + 8 = 0$ et $g(4) = 4^2 - 6\times4 + 8 = 0$.
Cette affirmation est donc vraie.