Fiche n°2

CALCULER AVEC LES PUISSANCES ET UTILISER LES ECRITURES SCIENTIFIQUES

I. Puissances entières d'un nombre relatif

Dans tout ce paragraphe, **a** désigne un nombre relatif et **n** un nombre entier positif non nul.

1. Puissances positives (rappel)

Définition (rappel) On note $\mathbf{a^n}$ le produit de **n** facteurs tous égaux à **a** : $a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}$

On dit « **a** puissance **n** » ou « **a** exposant **n** ».

Cas particuliers

- ¤ Si **a** = 0 : $0^n = 0$.
- ¤ Pour tout nombre **a** ≠ 0 :
  - $a^0 = 1$ $a^2 = a \times a$ « **a** au carré »
  - $a^1 = a$ $a^3 = a \times a \times a$ « **a** au cube »

• Longueurs : en **m**
• Aires : en $\mathbf{m^2}$
• Volumes : en $\mathbf{m^3}$

Exemples $2^5 = 2\times2\times2\times2\times2 = 32$; $(-3)^4 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = 81$

2. Puissances négatives

Définition On note $\mathbf{a^{-n}}$ l'inverse de $\mathbf{a^n}$, c'est-à-dire : $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$

Exemples $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2\times2\times2} = \frac{1}{8}$; $(-1)^{-3} = \frac{1}{(-1)^3} = \frac{1}{(-1)\times(-1)\times(-1)} = \frac{1}{-1} = -1$

Remarque D'après les exemples ci-dessus, $\mathbf{a^{-n}}$ peut être positif ou négatif !

3. Organiser un calcul avec les puissances

Règle de priorités dans les calculs *(voir fiche n°1)*

Dans un calcul sans parenthèses avec des puissances, **on effectue les puissances avant** d'appliquer les autres règles de priorité.

EXERCICE TYPE 1

Calculer et donner une valeur exacte sous forme fractionnaire ou décimale :

A = $\mathbf{(-4)^2}$; B = $\mathbf{-4^2}$; C = $\mathbf{10^{-3}}$; D = $\mathbf{(-5)^{-4}}$;

E = $\mathbf{\frac{1}{3} - 3^{-2}}$; F = $\mathbf{\frac{14^3}{7^3}}$; G = $\mathbf{3^2 \times 2^3}$; H = $\mathbf{(-2)^4 + 7 \times 3^2}$

Solution :

$(-4)^2 \neq -4^2$ (signe contraire…)

A = $\mathbf{(-4)^2} = (-4)\times(-4) = \mathbf{+16}$; B = $\mathbf{-4^2} = -(4^2) = \mathbf{-16}$

C = $\mathbf{10^{-3}} = \frac{1}{10^3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1\,000}} = \mathbf{0{,}001}$; D = $\mathbf{(-5)^{-4}} = \frac{1}{(-5)^4} = \frac{1}{(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{625}}$

E = $\mathbf{\frac{1}{3} - 3^{-2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{1}{9} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{9}}$; **F =** $\mathbf{\frac{14^3}{7^3}} = \left(\frac{14}{7}\right)^3 = 2^3 = \mathbf{8}$

G = $\mathbf{3^2\times2^3} = 9 \times 8 = \mathbf{72}$; E = $\mathbf{(-2)^4 + 7 \times 3^2} = 16 + 7 \times 9 = 16 + 63 = \mathbf{79}$

4. Règles de calcul sur les puissances

EXERCICE TYPE 2

Sans calculatrice et en utilisant la définition des puissances, écrire sous la forme d'une puissance du type $\mathbf{a^k}$ les expressions suivantes :

$I = \mathbf{9^3} \times \mathbf{9^2}$; $J = \dfrac{\mathbf{7^6}}{\mathbf{7^4}}$; $K = (\mathbf{5^4})^\mathbf{3}$; $L = \mathbf{10^3} \times \mathbf{10^{-5}}$; $M = \mathbf{2^3} \times \mathbf{5^3}$

Solution : $I = \mathbf{9^3} \times \mathbf{9^2} = 9\times9\times9 \times 9\times9 = \mathbf{9^5}$ $\quad J = \dfrac{\mathbf{7^6}}{\mathbf{7^4}} = \dfrac{7\times7\times7\times7\times7\times7}{7\times7\times7\times7} = \mathbf{7^2}$

$K = (\mathbf{5^4})^\mathbf{3} = (5\times5\times5\times5)^3 = (5\times5\times5\times5) \times (5\times5\times5\times5) \times (5\times5\times5\times5) = \mathbf{5^{12}}$

$L = \mathbf{10^3} \times \mathbf{10^{-5}} = \dfrac{10^3}{10^5} = \dfrac{10\times10\times10}{10\times10\times10\times10\times10} = \dfrac{1}{10^2} = \mathbf{10^{-2}}$

$M = \mathbf{2^3} \times \mathbf{5^3} = 2\times2\times2 \times 5\times5\times5 = (2\times5)\times(2\times5)\times(2\times5) = (2\times5)^3 = \mathbf{10^3}$

Remarque *(Pour aller plus loin)*

A partir des définitions de la puissance d'un nombre, on peut généraliser avec des lettres et mémoriser les propriétés suivantes :

Si **a** et **b** désignent des nombres différents de 0, et **n** et **p** désignent des entiers relatifs, alors :

$\mathbf{a^n} \times \mathbf{a^p} = \mathbf{a^{n+p}}$; $\dfrac{\mathbf{a^n}}{\mathbf{a^p}} = \mathbf{a^{n-p}}$; $(\mathbf{a^n})^\mathbf{p} = \mathbf{a^{n\times p}}$; $(\mathbf{a\times b})^\mathbf{n} = \mathbf{a^n} \times \mathbf{b^n}$

II. *Puissances* de 10 et écritures scientifiques

Dans tout ce paragraphe, **n** désigne un nombre entier positif non nul.

1. *Puissances de 10 et écritures décimales*

$$10^n = \underbrace{10 \times 10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{1\,000 \ldots 00}_{n \text{ zéros}} \quad ; \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}000 \ldots 001}_{n \text{ zéros}}$$

Préfixes scientifiques

Préfixe	giga	méga	kilo	centi	milli	micro	nano
Symbole	G	M	k	c	m	μ	n
Signification	10^9	10^6	10^3	10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}
Ecritures décimales	*1 000 000 000*	*1 000 000*	*1 000*	*0,01*	*0,001*	*0,000 001*	*0,000 000 001*

De l'infiniment petit à l'infiniment grand…

Cliquez sur la vidéo ci-contre « Sciences et Avenir »…
En cas de difficulté, utilisez le lien suivant :
https://youtu.be/PLhuZEosRRw

2. *Ecriture scientifique d'un nombre*

Définition L'**écriture scientifique** d'un nombre décimal positif est l'écriture de la forme
a × **10^n** où **a** est un nombre décimal compris entre 1 et 10 (10 exclu),
n est un entier relatif.

Remarque La notation scientifique est utile pour donner un **ordre de grandeur** ou un **encadrement** du résultat d'un calcul, et donc pour comparer les nombres.

EXERCICE TYPE 3 Compléter le tableau suivant :

	Calcul	*Ecriture décimale*	*Ecriture scientifique*
Rayon de la Terre (au niveau de l'équateur)	6 378 km	m	m
Virus de la grippe	90 nm	0,000000090 m	9×10^{-8} m
Mémoire / clé USB	2 Go	2 000 000 000 octets	2×10^9 octets
Particules dans l'air…	360 µg	0,000 360 g	$3{,}6 \times 10^{-4}$ g
Distance Terre-Soleil	150×10^6 km	150 000 000 000 m	$1{,}5 \times 10^{11}$ m
Valeur en € d'un CFP (CFP = franc pacifique)	838×10^{-5} €	0,00838 €	$8{,}38 \times 10^{-2}$ €