

Fiche n°16

TRANSFORMER DES FIGURES : SYMETRIES, TRANSLATION, ROTATION et HOMOTHETIES

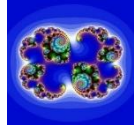
Preliminaire (exposé oral d'introduction)

Dans la nature, en arts plastiques, en architecture, en sciences de la vie et de la terre, en optique, etc., on utilise régulièrement des transformations de figures...

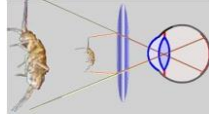
Voici quelques exemples originaux :



Papillon
(symétrie axiale)



Fractale
(symétrie centrale)



Loupe
(agrandissement)



Œuvre d'Escher
(translation)



Miroir cylindrique
(anamorphose)

I. Symétries, translation et rotation : des transformations qui conservent les longueurs...

Propriété Pour chacune des transformations de ce paragraphe (symétries axiale ou centrale, translation ou rotation), **la figure F et sa figure image F' sont superposables** (on dit aussi qu'elles sont « égales » comme les triangles égaux...).

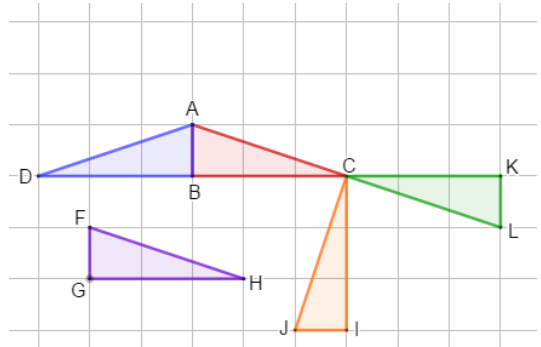
On dit que ces **transformations conservent les longueurs, la mesure des angles** (y compris les angles droits), **les aires, le parallélisme et l'alignement.**

	Symétrie axiale	Symétrie centrale
<i>Principe</i>	Plier le long d'une droite (miroir)	Effectuer un demi-tour autour d'un point
<i>Vocabulaire</i>	P' est le symétrique du point P par rapport à la droite (d) . La droite (d) est l' axe de symétrie.	P' est le symétrique du point P par rapport au point O Le point O est le centre de symétrie.
<i>Figure</i>		
<i>Notion clé</i>	L'axe de symétrie (d) est la médiatrice de tous les segments qui relient un point P et son symétrique P' .	Le centre de symétrie O est le milieu de tous les segments qui relient un point P et son symétrique P' .

	Translation	Rotation
<i>Principe</i>	Glisser selon une direction , un sens et une longueur donnée . (« un déplacement sans tourner »)	Tourner d'un angle donné autour d'un point .
<i>Vocabulaire</i>	P' est l' image du point P par la translation qui transforme le point A en A'.	P' est l' image du point P par la rotation de centre O et d' angle 75° dans le sens des aiguilles d'une montre. On appelle sens direct le sens inverse des aiguilles d'une montre.
<i>Figure</i>		
<i>Notion clé</i>	Le quadrilatère PP'A'A est un parallélogramme .	Le triangle POP' est isocèle en O tel que l'angle $\widehat{POP'}$ mesure 75°.

EXERCICE TYPE 1 EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR UNE FIGURE

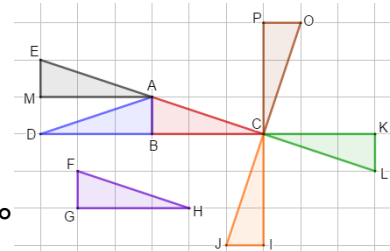
La figure ci-contre est constituée de cinq triangles rectangles égaux obtenus à l'aide du logiciel Geogebra.



- Décrire la transformation qui permet de passer :
 - du triangle rouge ABC au triangle bleu ADB ?
 - du triangle rouge ABC au triangle violet FGH ?
 - du triangle rouge ABC au triangle orange CIJ ?
 - du triangle rouge ABC au triangle vert CKL ?
- Sur cette figure, construire la figure obtenue si :
 - on transforme le triangle rouge ABC par une translation qui transforme C en A.
 - on transforme le triangle rouge ABC par une rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

Solution

- La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle bleu ADB est la **symétrie d'axe (AB)**.
 - La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle violet FGH est la **translation qui transforme le point A en F**.
 - La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle orange CIJ est la **rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens direct** (autrement dit, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).
 - La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle vert CKL est la **symétrie centrale de centre C**.
- Sur la figure ci-contre, on obtient :
 - le triangle AME par la translation qui transforme C en A.
 - le triangle POC par la rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre (sens indirect).



EXERCICE TYPE 2 EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR LES GRANDEURS

Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.
 Le motif pied-de-coq est représenté par le polygone représenté sur la figure 2, réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

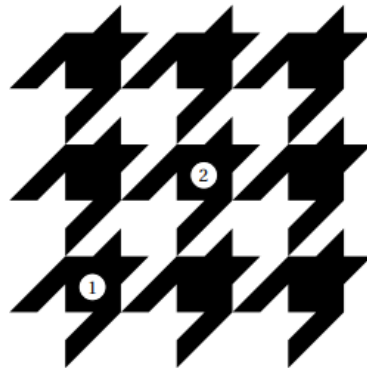


Figure 1

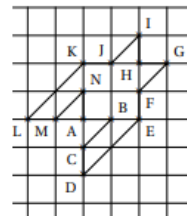


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?
2. Dans cette question, on considère que : $AB = 1 \text{ cm}$ (figure 2).
 - a. Montrer que l'aire du motif pied-de-coq de la figure 2 est 8 cm^2 .
 - b. Déterminer l'aire de tout le pavage. Justifier.

Solution

1. La transformation géométrique qui permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 est une translation.
2. a. Le motif comprend 4 carrés du quadrillage et 8 triangles rectangles comme FGH. Comme $AB = 1 \text{ cm}$, chaque carré du quadrillage a une aire de 1 cm^2 . De même, chaque triangle rectangle est en fait un demi-carré d'aire $0,5 \text{ cm}^2$. L'aire d'un motif est donc $4 \times 1 + 8 \times 0,5 = 8 \text{ cm}^2$.
- b. Le pavage est constitué de 9 motifs obtenus par translation... D'après la leçon, une translation transforme une figure en une figure superposable et donc de même aire...
 Donc chaque motif a une aire 8 cm^2 .
 Et l'aire du pavage est donc $9 \times 8 = 72 \text{ cm}^2$.

II. Etudier l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction...

1. Agrandissement et réduction (rappel)

Définition Agrandir ou réduire une figure, c'est construire une figure de même forme en multipliant les longueurs de la figure initiale par un nombre k strictement positif.

Vocabulaire

On dit que k est le **rapport** d'agrandissement ou de réduction.

- Si $k > 1$, il s'agit d'un **agrandissement**.
- Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une **réduction**.
- Si $k = 1$, il s'agit d'une reproduction.

Définition (rappel de 5^e et 4^e)

Le **rapport** k d'agrandissement ou de réduction est aussi appelé **échelle**.

$$k = \frac{\text{longueur obtenue après l'agrandissement ou la réduction}}{\text{longueur sur la figure initiale}}$$

2. Effets sur les longueurs et les angles

Propriétés Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

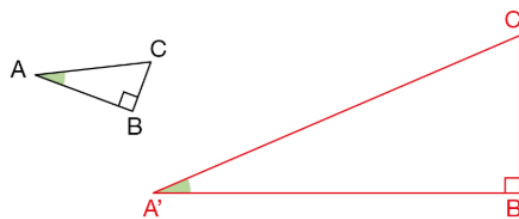
- les longueurs sont toutes multipliées par k ;
- les mesures des angles sont conservées.

Exemple

La figure rouge est un agrandissement de la figure noire dans le rapport 3,5.

Donc, d'après les propriétés ci-dessus :

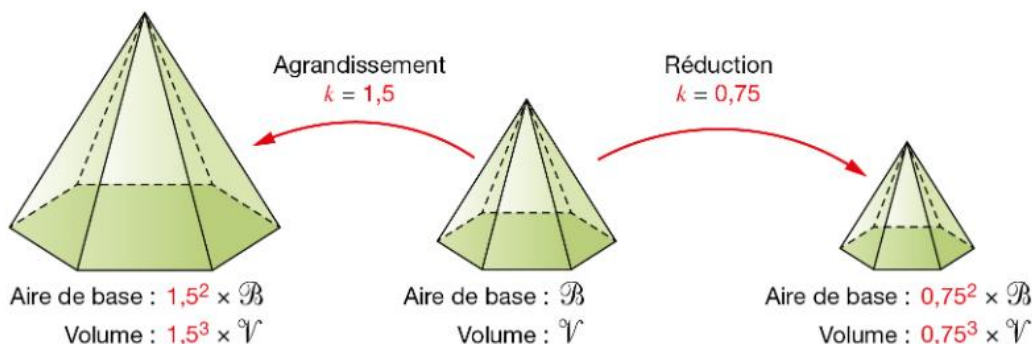
- $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = 3,5$;
- $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$
- (BC) est perpendiculaire à (AB), donc (B'C') est perpendiculaire à (A'B').



3. Effets sur les aires et les volumes

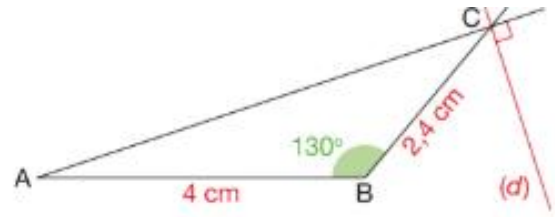
Propriétés Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

- l'aire d'une surface est multipliée par k^2 ;
- le volume d'un solide est multiplié par k^3 .



EXERCICE TYPE 3 EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR LES LONGUEURS

ABC est un triangle tel que :
 AB = 4 cm, BC = 2,4 cm et $\widehat{ABC} = 130^\circ$.
 (d) est la droite perpendiculaire en C à la droite (AC).
 Construire une réduction de cette figure de façon que
 le côté [A'B'] correspondant à [AB] mesure 3 cm.



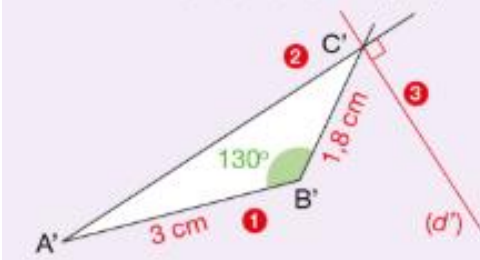
Solution

- On calcule le rapport k de réduction.
 $A'B' = k \times AB$, c'est-à-dire $3 = 4 \times k$.
 Donc $k = \frac{3}{4} = 0,75$.
- On calcule la longueur B'C'.
 $B'C' = k \times BC$, c'est-à-dire $B'C' = 0,75 \times 2,4 = 1,8$.
 Donc $B'C' = 1,8$ cm.
- Dans une réduction, les mesures des angles sont conservées donc :
 - $\widehat{A'B'C'} = 130^\circ$,
 - les droites (A'C') et (d') sont perpendiculaires.

Conseils

$$k = \frac{\text{longueur obtenue}}{\text{longueur initiale}}$$

- On construit dans cet ordre :
- 1 le segment [A'B'] de longueur 3 cm ;
 - 2 le point C' tel que $\widehat{A'B'C'} = 130^\circ$ et $B'C' = 1,8$ cm ;
 - 3 la droite (d') perpendiculaire à la droite (A'C') en C' (car une réduction conserve la perpendicularité).



III. Pour aller plus loin : constructions au compas pour les symétries, translation et rotation

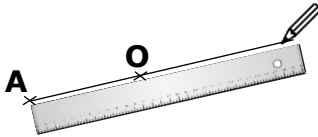
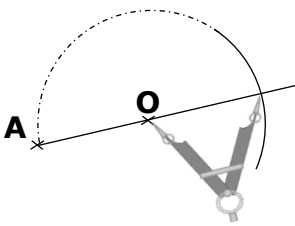
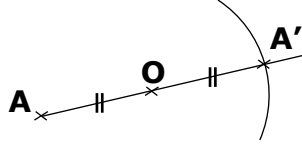
Symétrie axiale

Exemple : Construire le point A' tel que les points A et A' soient symétriques par rapport à (d).

<p>Avec Le compas, on place deux points sur la droite (d).</p>	<p>Sans changer l'écartement du compas, on trace deux arcs de cercle de l'autre côté de l'axe.</p>	<p>On place le point A' à l'intersection des deux arcs de cercle.</p>
<p>On laisse tous les traits de construction visibles.</p>		

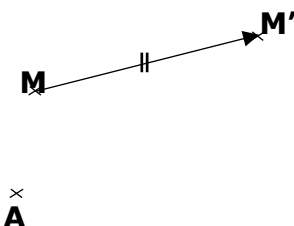
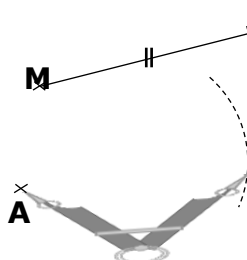
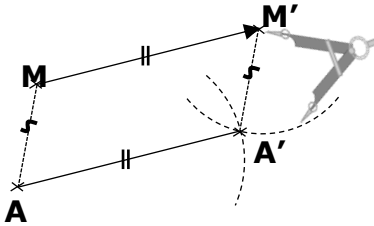
Symétrie centrale

Exemple : Construire le point A' tel que les points A et A' soient symétriques par rapport à O.

		
<p>Avec la règle (sans utiliser les graduations), on trace la demi-droite [AO].</p>	<p>Avec le compas, on reporte à partir du point O la longueur AO sur la demi-droite [AO].</p>	<p>On place le point A' à l'intersection de la demi-droite et de l'arc de cercle.</p>
<p>On code la figure et on laisse tous les traits de construction visibles.</p>		

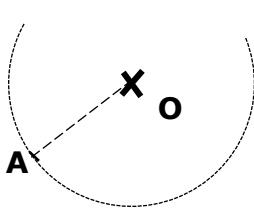
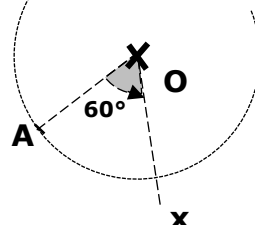
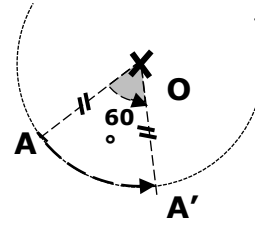
Translation

Exemple : Construire le point A' image du point A par la translation qui transforme M en M'.

		
<p>On cherche à vue d'œil où doit être le point A' pour que le AMM'A' soit un parallélogramme. (figure à main levée...)</p>	<p>Avec le compas, on reporte la longueur MM' à partir du point A.</p>	<p>On reporte la longueur AM à partir du point M' et on place le point A' à l'intersection de deux arcs de cercle...</p>
<p>On code la figure et on laisse tous les traits de construction visibles.</p>		

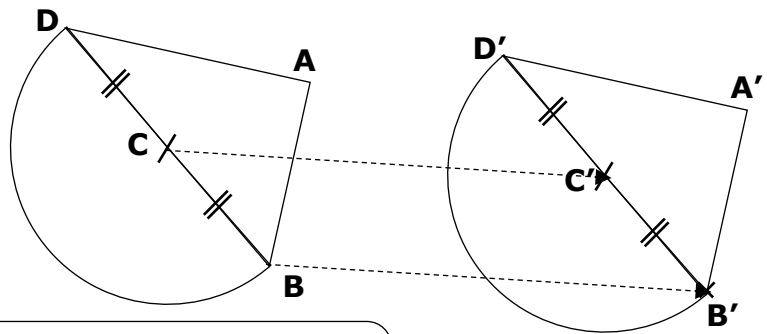
Rotation

Exemple : Construire le point A' image du point A par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens direct.

		
<p>Avec le compas, on construit un arc de cercle de centre O et de rayon OA.</p>	<p>A vue d'œil, on s'assure du sens de la rotation. On construit l'angle \widehat{AOx} de 60° dans le sens donné...</p>	<p>On place le point A' à l'intersection de la demi-droite et de l'arc de cercle...</p>
<p>On code la figure et on laisse tous les traits de construction visibles.</p>		

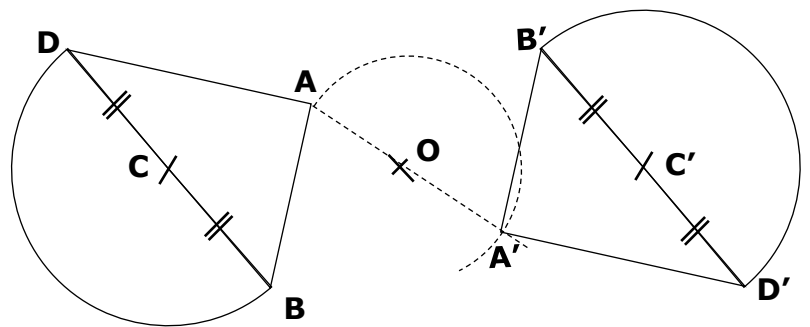
EXERCICE TYPE 4

Dans chaque cas, construire précisément avec les outils de géométrie la figure image par la transformation indiquée.

1. Translation « de B vers B' »

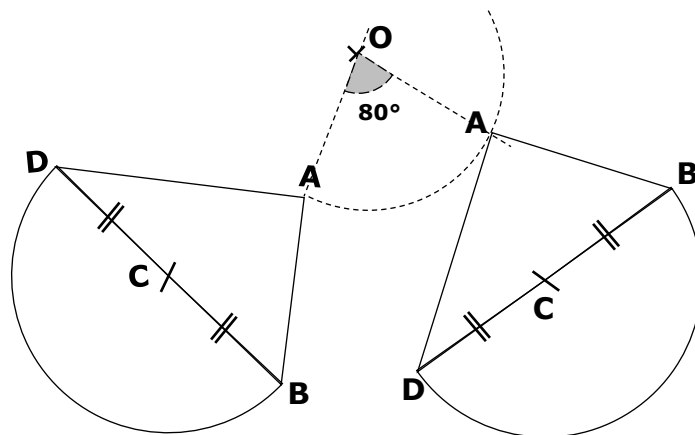
Par exemple, pour construire l'image du point C', on construit au compas le **parallélogramme** B'BCC'...

Et on construit de même A' et D'.

2. Symétrie centrale de centre O

Par exemple, pour construire l'image du point A', on construit la demi-droite [AO) et le demi-cercle de centre O passant par A...

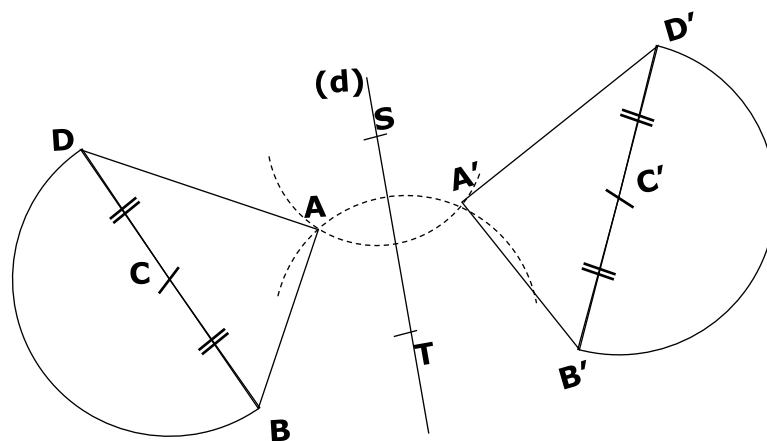
Et on construit de même B', C' et D'.

3. Rotation de centre O et d'angle 80° dans le sens direct

Par exemple, pour construire l'image du point A', on construit l'angle de côté [AO) et d'angle 80° dans le sens direct, et le cercle de centre O...

Et on construit de même B', C' et D'.

4. Symétrie axiale d'axe (d)



Par exemple, pour construire l'image du point A', on choisit deux points S et T sur l'axe (d) et on reporte au compas les longueurs SA et TA de l'autre côté de l'axe...

Et on construit de même B', C' et D'.