

Fiche n°14  
**CONNAITRE ET UTILISER LES TRIANGLES SEMBLABLES  
ET LE THEOREME DE THALES**

**I. Mes propriétés et théorèmes vus en 5<sup>e</sup> et 4<sup>e</sup>...**

**Propriété Inégalité triangulaire**

Dans un triangle, la somme des longueurs de deux côtés est toujours supérieure à la longueur du troisième côté.

**Propriété Somme des angles d'un triangle**

Dans tous les triangles, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

**Propriété Cas particuliers des triangles isocèles**

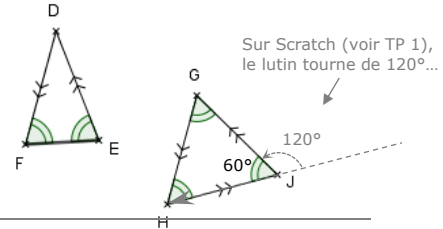
Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base ont la même mesure.

Réciproquement, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle.

**Propriété Cas particuliers des triangles équilatéraux**

Si un triangle est équilatéral, alors ses trois angles mesurent 60°.

Réciproquement, si un triangle a deux angles qui mesurent 60°, alors il est équilatéral.



**Théorème de Pythagore Pour calculer une longueur d'un triangle rectangle...**

Si un triangle est un triangle rectangle, alors le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

**Réciproque du théorème de Pythagore Pour démontrer qu'un triangle est rectangle**

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est un triangle rectangle.

**Les carrés à connaître**

|            |            |            |              |              |              |
|------------|------------|------------|--------------|--------------|--------------|
| $1^2 = 1$  | $2^2 = 4$  | $3^2 = 9$  | $4^2 = 16$   | $5^2 = 25$   | $6^2 = 36$   |
| $7^2 = 49$ | $8^2 = 64$ | $9^2 = 81$ | $10^2 = 100$ | $11^2 = 121$ | $12^2 = 144$ |

**Définition** On appelle **racine carrée** d'un nombre positif **a** et on note  $\sqrt{a}$  le nombre positif dont le carré est égal à **a**.

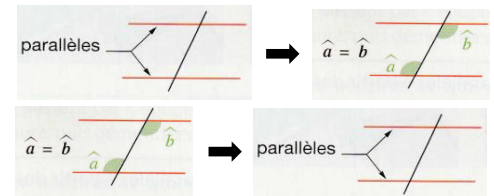
**Racines carrées à connaître**

|                 |                 |                 |                   |                   |                   |
|-----------------|-----------------|-----------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| $\sqrt{1} = 1$  | $\sqrt{4} = 2$  | $\sqrt{9} = 3$  | $\sqrt{16} = 4$   | $\sqrt{25} = 5$   | $\sqrt{36} = 6$   |
| $\sqrt{49} = 7$ | $\sqrt{64} = 8$ | $\sqrt{81} = 9$ | $\sqrt{100} = 10$ | $\sqrt{121} = 11$ | $\sqrt{144} = 12$ |

**Propriétés Angles alternes-internes et droites parallèles**

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes sont égaux.

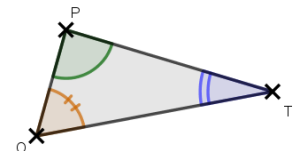
Réciproquement, si deux droites coupent une sécante en formant des angles alternes-internes égaux, alors ces droites sont parallèles.



**Définition** On dit que deux triangles sont **semblables** (ou **de même forme**) lorsque tous leurs angles sont deux à deux de même mesure.

**Propriété Triangles semblables et angles égaux...**

Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors leurs trois angles sont égaux et les triangles sont semblables.



**Théorèmes Triangles semblables et longueurs proportionnelles...**

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont deux à deux proportionnelles.

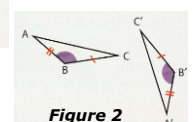
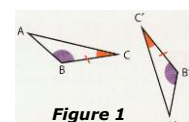
Réciproquement, si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles deux à deux, alors ces triangles sont semblables.

**Définition** On dit que deux triangles sont **égaux** lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur. On dit aussi qu'ils sont **superposables** ou **isométriques**.

**Propriétés Triangles égaux**

× Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur **compris** entre deux angles de même mesure, alors ces triangles sont égaux. (fig. 1)

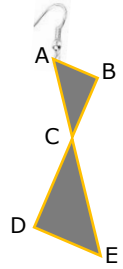
× Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure **compris** entre deux côtés de même longueur, alors ces triangles sont égaux. (fig. 2)



**EXERCICE TYPE 1**

Voici une boucle d'oreille en argent, entourée d'un fil doré. Elle est constituée de deux triangles ABC et CDE rectangles en B et en D. On donne les renseignements suivants :

- Les points A, C et E d'une part, et B, C et D d'autre part sont bien alignés.
- En dimensions réelles, on a : AB = 1,2 cm ; AC = 2 cm et DE = 1,8 cm.



1. Déterminer la longueur du fil doré entre B et C.
2. Démontrer que les triangles ABC et CDE sont semblables.
3. En déduire la longueur totale de fil doré nécessaire pour entourer cette boucle d'oreille.

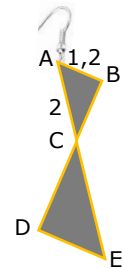
Solution

Avant tout, il faut reporter sur la figure toutes les données pour mieux voir les théorèmes de la leçon que l'on peut utiliser.

1. D'après l'énoncé, le triangle ABC est rectangle en B.

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \quad \text{d'où :} \quad \begin{aligned} 2^2 &= 1,2^2 + BC^2 \\ 4 &= 1,44 + BC^2 \\ BC^2 &= 4 - 1,44 = 2,56 \\ \text{donc : } BC &= \sqrt{2,56} = 1,6 \text{ cm.} \end{aligned}$$



La longueur du fil doré entre B et C est donc de 1,6 cm.

2. D'après l'énoncé, les angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{CDE}$  sont des angles droits.

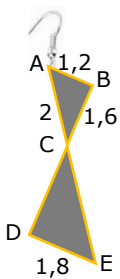
Comme les angles  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{DCE}$  sont opposés par le sommet, ils sont aussi égaux. D'après la leçon, si deux triangles ont deux angles de même mesure, alors ils sont semblables.

Les triangles ABC et CDE sont donc semblables.

3. Pour déterminer la longueur totale de fil doré nécessaire pour entourer cette boucle d'oreille, il nous faut d'abord déterminer les longueurs CD et CE.

D'après la question précédente, on sait que les triangles ABC et CDE sont semblables.

D'après la leçon, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont deux à deux proportionnelles.



On a donc :

$$\frac{\text{Triangle } ABC}{\text{Triangle } EDC} \implies \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD}$$

Côtés opposés à A et E

Côtés opposés à B et D.

Côtés opposés à  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{DCE}$ .

On remplace par les longueurs connues :

$$\frac{2}{CE} = \frac{1,2}{1,8} = \frac{1,6}{CD}$$

On utilise les produits en croix :  $CE = \frac{2 \times 1,8}{1,2} = 3 \text{ cm}$  et  $CD = \frac{1,8 \times 1,6}{1,2} = 2,4 \text{ cm}$

La **longueur totale de fil doré nécessaire** pour entourer cette boucle d'oreille est donc :  $AB + BC + CA + CD + DE + EC = 1,2 + 1,6 + 2 + 2,4 + 1,8 + 3 = 12 \text{ cm.}$

## II. Théorème de Thalès : pour calculer des longueurs dans des triangles semblables

### Théorème de Thalès

Si deux droites (BD) et (CE) sont sécantes en A et telles que les deux droites (BC) et (DE) sont parallèles, alors les triangles ABC et ADE sont semblables.

Autrement dit :  $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$  (longueurs des deux triangles deux à deux proportionnelles)

Preuve (illustration dans le cas de figure-clé n°1)

1<sup>ère</sup> étape :

Prolongeons le segment [DE] en une droite (GH) comme ci-contre.

On sait donc que :

- les droites (GH) et (BC) coupées par la sécante (BD) forment des angles  $\widehat{ADE}$  et  $\widehat{GBC}$  qui sont alternes-internes ;
- Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

D'après la leçon, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes sont égaux.

On peut donc conclure que  $\widehat{GDB} = \widehat{ABC}$ .

Comme les angles  $\widehat{GDB}$  et  $\widehat{ADE}$  sont **opposés par le sommet**, on peut conclure que donc  $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ .

2<sup>e</sup> étape :

Les triangles ont l'angle  $\widehat{DAE}$  en commun et deux angles égaux puisque  $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ .

D'après la leçon, si deux triangles ont deux angles de même mesure, alors ils sont semblables. Donc les triangles ADE et ABC sont semblables.

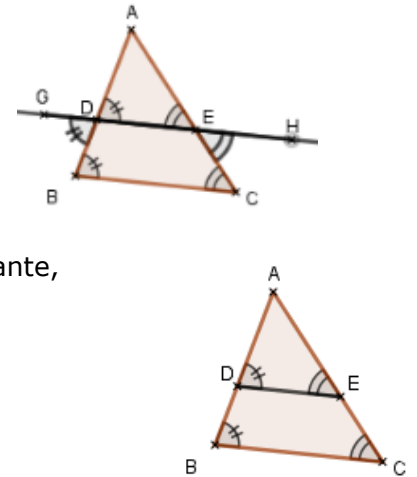
3<sup>e</sup> étape :

D'après la question précédente, on sait que les ADE et ABC sont semblables.

D'après la leçon, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

On a donc :  $\frac{\text{Triangle ADE}}{\text{Triangle ABC}} \implies \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

Annotations :  
 - Côtés opposés à E et C (pointant vers AE/AC)  
 - Côtés opposés à D et B (pointant vers AD/AB)  
 - Côtés opposés à A (pointant vers DE/BC)



### Les deux figures-clé à connaître

|                        |  |  |
|------------------------|--|--|
| Figures-clé            | <p>Figure-clé des « triangles emboîtés »</p>   | <p>Figure-clé dite du « papillon »</p>   |
| Données                | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Les droites (PR) et (OS) sont sécantes en T ;</li> <li>➤ Les droites (PO) et (RS) sont parallèles.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Les droites (EH) et (DG) sont sécantes en F ;</li> <li>➤ Les droites (DE) et (HG) sont parallèles.</li> </ul> |
| Repérage des triangles | 1 <sup>er</sup> triangle : T P O<br>2 <sup>ème</sup> triangle : T R S  | 1 <sup>er</sup> triangle : F E D<br>2 <sup>ème</sup> triangle : F H G  |
| Conclusion             | $\frac{TP}{TR} = \frac{TO}{TS} = \frac{OP}{RS}$  | $\frac{FE}{FH} = \frac{FD}{FG} = \frac{ED}{HG}$  |

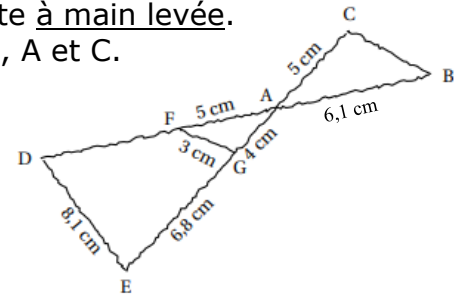
**EXERCICE TYPE 2**

Pour illustrer cet exercice-type, la figure ci-dessous a été faite à main levée.

Les points D, F, A et B sont alignés, ainsi que les points E, G, A et C.

On précise que les droites (FG) et (DE) sont parallèles.

1. Le triangle AFG est-il rectangle en G ?
2. Calculer la longueur du segment [AD].  
En déduire la longueur du segment [FD].
3. Les droites (FG) et (BC) sont-elles parallèles ? Justifier.

Solution

*Attention, la figure est faite à main levée ! Il ne faut utiliser que les données de l'énoncé et non pas des impressions liées à la figure à main levée !*

1. Dans le triangle AFG, d'après les données de la figure, on peut calculer :

- d'une part :  $FG^2 + GA^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

- d'autre part :  $AF^2 = 5^2 = 25$ .

L'égalité de Pythagore  $FG^2 + GA^2 = AF^2$  est donc vérifiée.

D'après la réciproque du théorème de Pythagore,

on peut donc conclure que **le triangle est bien rectangle en G**.

2. Comme l'énoncé précise que les points D, F et A sont alignés, ainsi que les points E, G et A, on peut affirmer que les droites (FD) et (GE) sont sécantes en A.

D'autre part, il est aussi indiqué que les droites (FG) et (DE) sont parallèles.

On peut donc appliquer le théorème de Thalès pour les triangles AFG et ADE.

D'où :  $\frac{AF}{AD} = \frac{AG}{AE} = \frac{FG}{DE}$  soit  $\frac{5}{AD} = \frac{4}{10,8} = \frac{3}{8,1}$

Et donc (produit en croix) :  $AD = \frac{5 \times 10,8}{4} = 13,5 \text{ cm.}$

La longueur du segment [FD] est donc :  $FD = AD - AF = 13,5 - 5 = 8,5 \text{ cm.}$

3. Les droites (FB) et (GC) sont sécantes en A.

Comparons les rapports de longueurs  $\frac{AF}{AB}$  et  $\frac{AG}{AC}$  :

×  $\frac{AF}{AB} = \frac{5}{6,1} \approx 0,82$

×  $\frac{AG}{AC} = \frac{4}{5} = 0,8$ .

Les deux quotients ne sont pas égaux.

Si les droites (FG) et (BC) étaient parallèles, alors, d'après le théorème de Thalès, ces rapports devraient être égaux !

C'est donc que les droites (FG) et (BC) ne sont pas parallèles.

### III. Réciproque du théorème de Thalès : pour démontrer que deux droites sont parallèles...

#### Réciproque du théorème de Thalès

Si deux droites (BD) et (CE) sont sécantes en A telles que :

$$\times \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

$\times$  les points A, D, B et les points A, E, C sont alignés dans le même ordre,  
alors les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

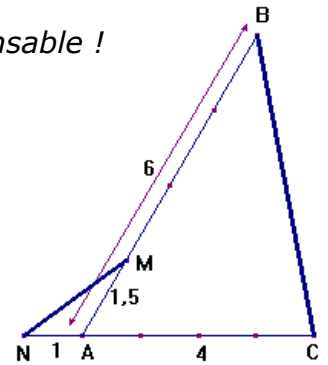
**Remarque :** La donnée « alignés **dans le même ordre** » est indispensable !

Etudions un contre-exemple avec la figure ci-contre.

Sur la figure ci-contre, on a :  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = 0,25$ .

Les rapports sont bien égaux, comme dans le théorème de Thalès, mais les droites (MN) et (BC) ne sont pas du tout parallèles !

Pourtant les points A, M, B et les points A, N, C sont chacun alignés, **mais pas dans le même ordre...**



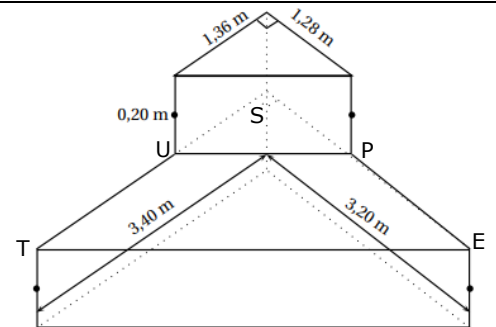
#### EXERCICE TYPE 3

Pour pouvoir monter sur sa terrasse qui est légèrement surélevée, M. François décide de construire un escalier en béton, sous forme de deux prismes droits superposés, dont les bases sont des triangles rectangles.

Voici ses plans représentés ci-contre.

Avant de préparer le coffrage pour le béton, il vous demande si les deux marches seront bien « parallèles ».

1. Construire à l'échelle 1/50<sup>e</sup> une *vue de dessus* de cet escalier.
2. D'après vous, les deux marches seront-elles bien « parallèles » ?



#### Solution

1. Pour réaliser la vue de dessus à l'échelle 1/50<sup>e</sup>, Il faut d'abord déterminer les longueurs de la figure réduite (avec le produit en croix) :

|  | Echelle | SU   | ST   | SP   | SE   |
|--|---------|------|------|------|------|
| Longueurs sur la vue de dessus (en cm) | 1       | 1,36 | 3,40 | 1,28 | 3,20 |
| Longueurs réelles (en cm)              | 50      | 2,72 | 6,8  | 2,56 | 6,4  |

2. La question revient à savoir si les droites (UP) et (TE) sont parallèles ou non.

Comparons les rapports  $\frac{SP}{SE}$  et  $\frac{SU}{ST}$  :

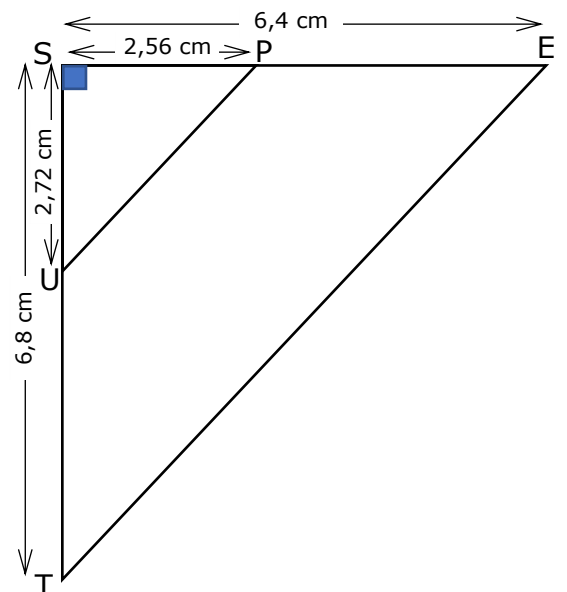
$$\frac{SP}{SE} = \frac{1,28}{3,20} = \mathbf{0,4} \quad \text{et} \quad \frac{SU}{ST} = \frac{1,36}{3,40} = \mathbf{0,4}$$

On sait donc que les droites (UT) et (PE) sont donc sécantes en A telles que :

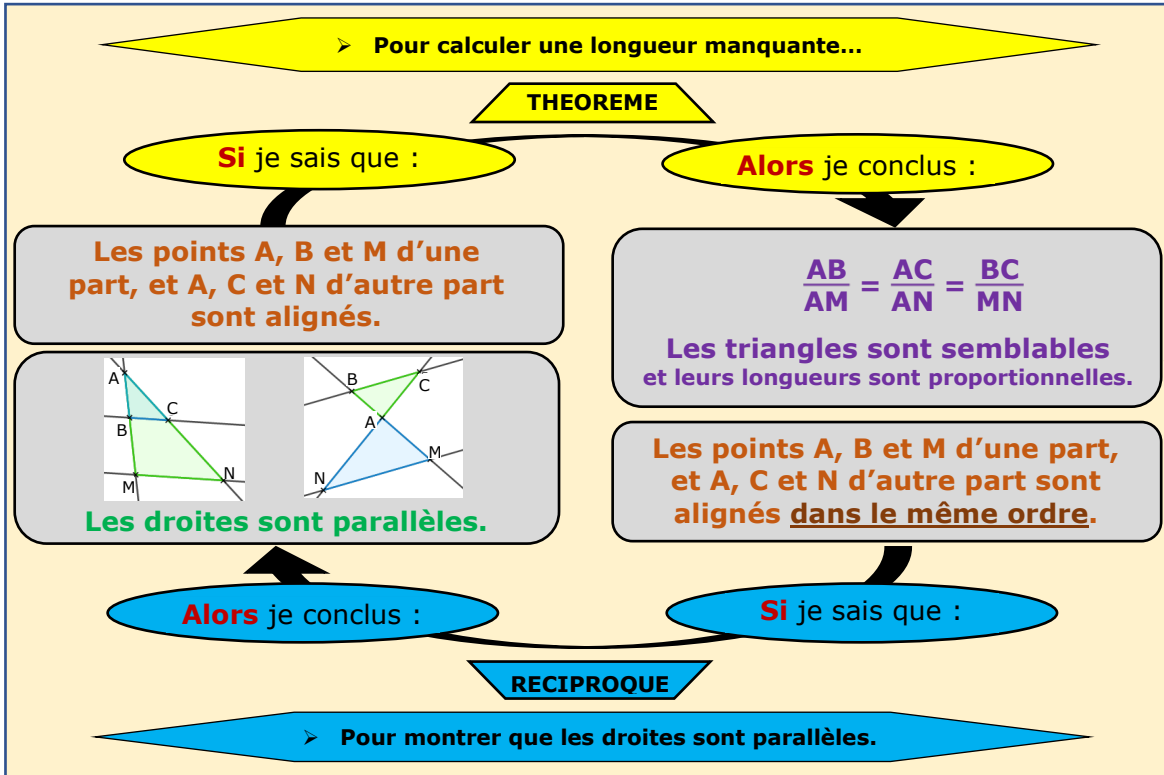
$$\times \frac{SP}{SE} = \frac{SU}{ST} ;$$

$\times$  Les points S, U, T et les points S, P, E sont alignés dans le même ordre.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (UP) et (TE) sont donc parallèles, c'est à dire que **les deux marches** de cet escalier **sont bien parallèles**.



**ANNEXE : une carte mentale pour mieux comprendre...**



**Si**

Deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure.

**Alors**