Fiche n°11

ETUDIER DES GRANDEURS USUELLES

I. Grandeurs du plan et de l'espace

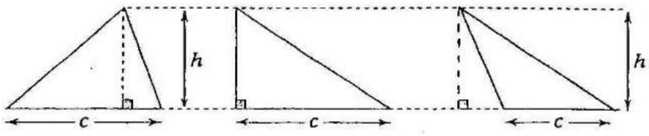
1. Mon formulaire « AIRE et PERIMETRE »

Les formules à connaître

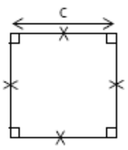
Triangle

c : un côté du triangle
h : la hauteur associée à ce côté

• Aire = $\dfrac{\mathbf{ch}}{\mathbf{2}}$



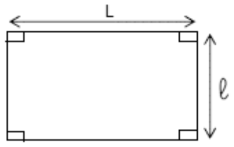
Carré



• Périmètre = **4c**

• Aire = **c²**

Rectangle

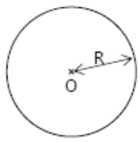


• Périmètre = **2(L+ℓ)** = 2L + 2l

• Aire = **L×ℓ**

Cercle et disque

R : rayon

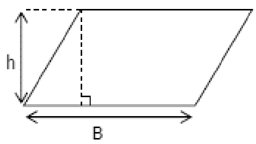


• Périmètre du cercle = **2πR**

• Aire du disque = **πR²**

Les formules à savoir retrouver…

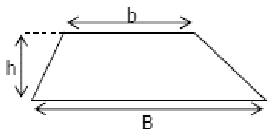
Parallélogramme



c : un côté du parallélogramme
h : la hauteur associée à ce côté

• Aire = **ch**

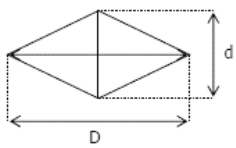
Trapèze



B : grande base
b : petite base
h : la hauteur associée aux bases

• Aire = (B+b)h÷2 = $\dfrac{\mathbf{(B+b)h}}{\mathbf{2}}$

Losange



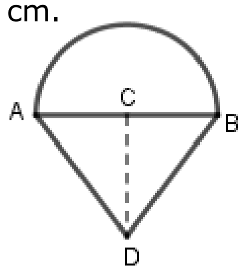
D : grande diagonale
d : petite diagonale

• Aire = Dd÷2 = $\dfrac{\mathbf{Dd}}{\mathbf{2}}$

EXERCICE TYPE 1

On considère la figure ci-contre. On précise que : AB = 1,8 cm et CD = 1,2 cm.

Calculer une valeur approchée, au centième près, de l'aire de cette figure.



Solution

Calculons l'aire du demi-disque de rayon R = 0,9 cm :

$\pi R^2 \div 2 = \pi \times AC^2 \div 2 = \pi \times 0{,}9^2 \div 2 = 0{,}405\pi \approx 1{,}27$ cm².

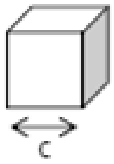
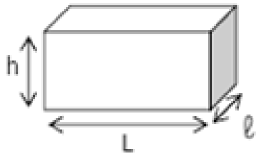
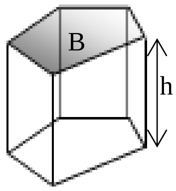
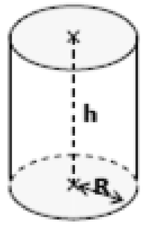
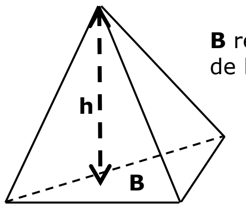
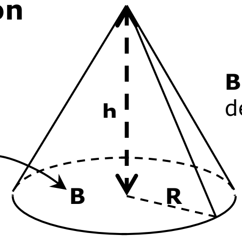
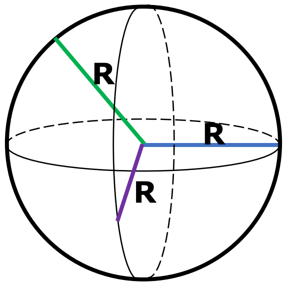
Calculons l'aire du triangle ABD :

$\dfrac{ch}{2} = \dfrac{AB \times CD}{2} = \dfrac{1{,}8 \times 1{,}2}{2} = 1{,}08$ cm².

On donne une valeur exacte, puis une valeur approchée.

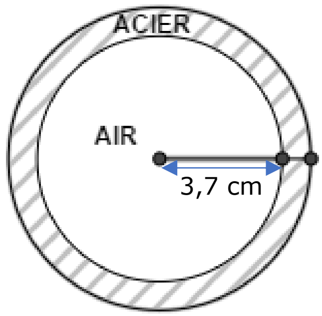
L'aire de cette figure est donc environ de : 1,27 + 1,08 = 2,35 cm².

2. Mon formulaire « VOLUME »

<table>
<tr><th colspan="4">Les formules à connaître</th></tr>
<tr>
<td>Cube

• Volume = c^3</td>
<td>Pavé droit
(parallélépipède rectangle)

• Volume = $L \times \ell \times h$ = $L\ell h$</td>
<td>Prisme droit

• Volume = B×h = Bh
(où B est l'aire de la Base)</td>
<td>Cylindre (de révolution)

• Volume = $\pi R^2 h$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Pyramide

B représente l'aire de la base.
• Volume = $\frac{\text{Aire de la Base x hauteur}}{3} = \frac{\mathbf{B \times h}}{\mathbf{3}}$</td>
<td colspan="2">Cône de révolution
$\mathbf{B = \pi R^2}$

B représente l'aire de la base.
• Volume = $\frac{B \times h}{3} = \frac{\mathbf{\pi R^2 h}}{\mathbf{3}}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">Sphère et boule
• Aire de la sphère = $4\pi R^2$
• Volume de la sphère = $\frac{4}{3}\pi R^3$
</td>
</tr>
</table>

EXERCICE TYPE 2 Calculer le volume des deux solides suivants :

On considère une boule de pétanque de rayon 3,7 cm.
Elle est constituée en acier mais est creuse à l'intérieur (voir le croquis ci-contre).
On donnera les résultats arrondis à l'unité près.



1. Calculer l'aire de la surface de cette boule de pétanque.
2. Calculer le volume d'acier compris dans cette boule de pétanque.

<u>*Solution*</u>

1. Le diamètre de la boule de pétanque est 7,4 cm et son rayon est 7,4 ÷ 2 = 3,7 cm.

   L'aire de la surface de cette boule de pétanque est donc de :

   $4\pi R^2 = 4 \times \pi \times 3{,}7^2 = \mathbf{54{,}76\pi\ cm^2} \approx \mathbf{172\ cm^2}$.

2. Le volume correspond à la différence entre le volume total de la boule et le volume d'air…

   Calculons le volume total de la boule : $V_{Boule} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3{,}7^3 \approx 212\ cm^3$.

   Calculons le volume de l'air : $V_{Air} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 = 36\pi \approx 113\ cm^3$.

   Le volume d'acier compris dans cette boule est donc :

   $V_{Boule} - V_{Air} \approx 212 - 113 = \mathbf{99\ cm^3}$.

*On donne une **valeur exacte**, puis une valeur approchée.*

3. Convertir les unités de longueur, d'aire et de volume

Tableau de conversion des longueurs, aires et volumes

- Longueurs :

1 dm = 10 cm

kilo-	hecto-	déca-		déci-	centi-	milli-
unité de mille	centaine	dizaine	UNITE	dixième	centième	millième
km	**hm**	**dam**	**m**	**dm**	**cm**	**mm**
1	**5**	**3**	**4**	**2**	**0**	

- Aires :

1 dm² = 100 cm²

	km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²
			ha .		a .								
							1	**2**	**0**	**0**	**0**		
		5	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**						

- Volumes :

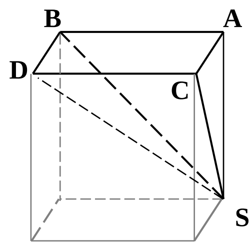
1 L = 1 dm³ = 1 000 cm³

m³			dm³			cm³			mm³
	hL	**daL**	**L**	**dL**	**cL**	**mL**			
4	**1**	**8**	**0**						
			0	**0**	**1**	**2**			
	3	**4**	**6**	**9**					
		3	**4**	**2**	**0**	**0**			

EXERCICE TYPE 3 Convertir et compléter les pointillés :

- 1**5**,342 **hm** = 1 53**4**, 2 **m** = 153 42**0** **cm**
- **1**,20 **m²** = 12 00**0** **cm²** ; 500 00**0** **m²** = 5**0** **hm²** = 5**0** **ha**
- **4**,18 **m³** = 4 18**0** **dm³** ; 12 cm³ = **0**,012 **dm³**
- 3,469 hL = 34**6**,9 **L** = 3469 dL ; 3**4**,2 **L** = 3**4**,2 **dm³** = 34 20**0** **cm³** = 34 20**0** **mL**

EXERCICE TYPE 4 Convertir et compléter les pointillés :



En justifiant votre réponse, dire si l'on peut verser 1 L d'eau :

1. dans une bonbonne sphérique de diamètre 12 cm ?
2. dans la pyramide ABCDS ci-contre obtenue en découpant un cube de côté 1,5 dm ?

Solution

1. Calculons le volume de la bonbonne sphérique de rayon 6 cm :

$$V_{\text{Sphère}} = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 6^3 = 288\pi \approx 905 \text{ cm}^3$$

Comme 905 cm³ = 0,905 dm³ = 0,905 L < 1 L,
on ne peut pas verser 1 L d'eau dans cette bonbonne.

2. Avant de calculer le volume de la pyramide ABCDS, il faut déjà repérer convenablement la base et la hauteur associée. Comme la pyramide est un morceau du cube, on peut voir que le côté [SA] est perpendiculaire au carré ABCD, et donc que la hauteur [SA] est associée à la base ABCD dont il faut d'abord calculer l'aire.

Aire du carré ABCD (base) : Aire(ABCD) = c² = 1,5² = 2,25 dm².

Volume de la pyramide : $V = \frac{B \times h}{3} = \frac{\text{Aire(ABCD)} \times SA}{3} = \frac{2{,}25 \times 1{,}5}{3} = 1{,}125 \text{ dm}^3$.

Comme 1,125 dm³ = 1,125 L > 1L, on peut verser 1 L d'eau dans cette pyramide.

II. *Grandeur produit et grandeur quotient*

1. Comprendre les grandeurs composées

La masse (g), la longueur (m), l'intensité (A), la tension (V), le temps (h), etc. sont des grandeurs simples bien connues…
Une **grandeur composée** provient du quotient ou du produit de grandeurs simples : **son unité doit être écrite en cohérence avec les unités utilisées**.

EXERCICE TYPE 5 **Exemples de grandeurs composées et d'unités associées**

Relier chaque grandeur composée à l'unité (ou plusieurs) qui convient pour l'exprimer.

Densité de population •	• 27 m/s
Vitesse •	• 45 m^3
Volume •	• 220 hab/km²
Energie électrique •	• 52 MWh
Rendement agricole •	• 50 km.h^{-1}
Aire •	• 47 Mbit/s
Prix de l'eau potable •	• 5,6 t/ha
Débit d'une connexion Internet •	• 8 g.L^{-1}
Prix du lait •	• 32 cm²
Masse volumique : $\rho = \dfrac{m}{V}$ •	• 1,97 €/m^3
Consommation d'essence •	• 29,90 €/kg
Prix de la viande •	• 33 gouttes/min
Débit d'une perfusion médicale : $Q = \dfrac{V}{t}$ •	• 0,375 €/L
	• 100 mL.h^{-1}
	• 5 L/100 km

2. La vitesse moyenne : un exemple de grandeur quotient

La **vitesse moyenne v** sur un trajet est le quotient de la distance parcourue **d** par la durée **t** du trajet.

$$\text{m/s} \longrightarrow \mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}} \quad \begin{matrix} \leftarrow \text{m} \\ \leftarrow \text{s} \end{matrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{v} \times \mathbf{t} \qquad \mathbf{t} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}}$$

EXERCICE TYPE 6

1. Un guépard parcourt 100 m en 4,5 s.
   Calculer sa vitesse moyenne en km/h.
2. Une moto se déplace pendant 10 s à la vitesse moyenne de 54 km/h.
   Quelle est la distance parcourue en mètres ?
3. Une chenille se déplace à la vitesse moyenne de 1,8 m/h.
   Quelle durée, en minutes, va-t-elle mettre pour parcourir 24 cm ?

<u>*Solutions*</u> *Attention, plusieurs autres démarches sont possibles…*

1. DANGER *<u>Cohérence des unités</u> : pour obtenir la vitesse en km/h, il faut exprimer la distance en km, et le temps en h…*

Conversions : ¤ **d** = 100 m = 0,1 km ¤ **t** = 4,5 s = $\frac{4,5}{3\ 600}$ h = $1,25\times10^{-3}$ h.

La vitesse moyenne du guépard est : $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}} = \frac{0,1}{1,25\times10^{-3}}$ = **80 km/h**.

2. *<u>Cohérence des unités</u> : pour obtenir la distance en m avec une durée en s, la vitesse doit être exprimée en m/s.*

Conversion : ¤ **t** = 10 s ¤ **v** = 54 km/h = $\frac{54\text{ km}}{1\text{ h}} = \frac{54\ 000\text{ m}}{3\ 600\text{ s}}$ = 15 m/s.

Comme $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}}$, la distance parcourue par la moto est : **d** = **v**×**t** = 15×10 = **150 m**.

3. *<u>Cohérence des unités</u> : pour obtenir le temps en min, la vitesse doit être exprimée m/min et donc la distance en m.*

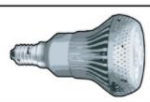
Conversions : ¤ **d** = 24 cm = 0,24 m ¤ **v** = 1,8 m/h = $\frac{1,8\text{ m}}{1\text{ h}} = \frac{1,8\text{ m}}{60\text{ min}}$ = 0,03 m/min

Comme $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{t}}$, la durée du parcours de la chenille est : $\mathbf{t} = \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{v}} = \frac{0,24}{0,03}$ = **8 min**.

3. L'énergie électrique : un exemple de grandeur produit

EXERCICE TYPE 7

On étudie de type d'ampoules qui fournissent un éclairage semblable.

		
Type d'ampoule	halogène	LED
Puissance électrique en W (watts)	75	10
Prix d'achat en €	2,25	16,50
Durée de vie en h (heures)	2 000	30 000

1. Quelle quantité d'énergie électrique consomme chacune de ces ampoules en un an si on les laisse allumées 2 h par jour en moyenne ?

2. Le coût du kWh est 0,16 €.
Quelle économie annuelle réalise-t-on avec une ampoule LED ?

3. Combien d'ampoules halogènes aura-t-on achetées lorsque l'ampoule LED sera à son tour à changer ? Quelle économie réalise-t-on ?

<u>*Solution*</u>

1. Sur une année (365 jours), on laisse ces ampoules allumées pendant 2 × 365 = 730 h.
La quantité d'énergie électrique consommée est donc :
- pour une ampoule halogène : 75 × 730 = 54 750 Wh = **54,75 kWh**.
- pour une LED : 10 × 730 = 7 300 Wh = **7,3 kWh**.

2. Si le coût du kWh est 0,16 €, alors l'économie annuelle réalisée une ampoule LED sera :
(54,75 – 7,3) × 0,16 = 7,592 €.

(Attention, c'est l'économie réalisée sur une seule ampoule…)

3. 30 000 ÷ 2 000 = 15.
Il faudra donc 15 ampoules halogènes achetées pour une seule ampoule LED changée.
L'économie sera alors de : 15×2,25 – 16,50 = **17,25 €**.