Fiche n°5

# RESOUDRE UN PROBLEME PAR UNE EQUATION

## I. Qu'est-ce que des expressions littérales égales ?

<u>A savoir</u>

¤ Pour tester une égalité, il faut **calculer chaque membre de l'égalité <u>séparément</u>** pour vérifier s'ils sont égaux ou non.

¤ On dit qu'une **égalité d'expressions littérales est vraie** s'il y a égalité <u>pour n'importe quelle valeur choisie</u>…

**EXERCICE TYPE 1** **Qu'est-ce qu'une égalité d'expressions littérales ?**

**1.** Tester l'égalité $n^2 - 6n = 15 - 4n$ pour $n = 5$ puis pour $n = -3$.

**2.** Peut-on dire que l'égalité $n^2 - 6n = 15 - 4n$ est toujours vraie ?

<u>Solution</u>

**1.** ¤ Pour $n = 5$, on a : $n^2 - 6n = 5^2 - 6\times5 = 25 - 30 = \mathbf{-5}$
$15 - 4n = 15 - 4\times5 = 15 - 20 = \mathbf{-5}$
L'égalité est donc vraie pour $n = 5$.

¤ Pour $n = -3$, on a : $n^2 - 6n = (-3)^2 - 6\times(-3) = 9 + 18 = \mathbf{27}$
$15 - 4n = 15 - 4\times(-3) = 15 + 12 = \mathbf{27}$
L'égalité est également vraie pour $n= -3$.

**2.** Pour $b = 0$, on a : $n^2 - 6n = 0^2 - 6\times0 = \mathbf{0}$
$15 - 4n = 15 - 4\times0 = \mathbf{15}$ L'égalité est fausse pour $n = 0$.

Grâce à ce **contre-exemple**, je peux conclure que l'égalité $n^2 - 6n = 15 - 4n$ n'est pas vraie pour n'importe quelle valeur pour n.

## II. Modéliser un problème à l'aide d'une équation

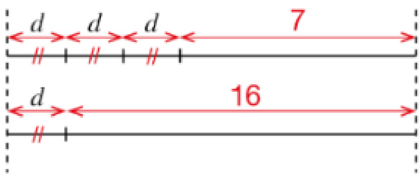
*On peut modéliser certains problèmes à l'aide d'une* ***équation****, c'est-à-dire à l'aide d'une* égalité dans laquelle intervient un nombre de valeur **inconnue**, *désigné par une lettre, et dont on aimerait connaître la valeur…*

*Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres (voir séquence « expressions littérales ») :* une valeur de l'inconnue pour laquelle **l'égalité est vraie** est appelée **solution** de l'équation.

**Résoudre une équation** *d'inconnue $x$,* c'est **trouver toutes les solutions** de cette équation *: autrement dit, c'est trouver par quel(s) nombre(s) il faut remplacer l'inconnue $x$ pour que l'égalité soit vraie.*

**EXERCICE TYPE 2** **Modéliser un problème par une équation**

Léna a fait trois tours du lac de la Cavayère, en VTT, puis a parcouru 7 km dans la forêt.
Manoli n'a fait qu'un seul tour du lac, mais a d'abord effectué un grand parcours de 16 km.
A leur arrivée au parking, ils constatent qu'ils ont parcouru la même distance totale.
Voici un schéma qui représente la situation.




**1.** Que représente l'inconnue $d$ sur ce schéma ?

**2.** Laquelle des propositions suivantes permet de modéliser ce problème ?

***a.*** $4d = 23$ ***b.*** $3d + 7 = d + 16$ ***c.*** $3d - d = 7 - 16$ ***d.*** $3d + 7 > d + 16$

*Solution*

1. L'inconnue $d$ représente la distance parcourue pour un tour du lac de la Cavayère.
2. Léna a parcouru une distance de $3d$ km lors des trois tours du lac de la Cavayère, puis 7 km dans la forêt, soit un total de $3d + 7$ km.
   Pendant ce temps, Manoli a parcouru $d + 16$ km.
   Comme ils ont parcouru la même distance totale, on a l'équation : $3d + 7 = d + 16$ (réponse ***b***).

*Remarque* La proposition ***d.*** de l'exercice type 2 ci-dessus s'appelle une **inéquation** : cette inéquation signifierait que Léna a parcouru plus de distance totale que Manoli…

## III. *Résoudre une équation de la forme $ax + b = cx + d$*

*Méthode* Pour résoudre une équation, on la transforme par étapes pour obtenir une équation de la forme "$x$ = a" où a est le nombre cherché : la solution.

*Règles*

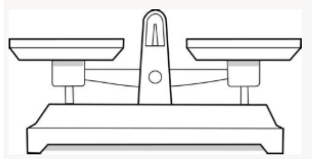
On conserve une égalité lorsque :
- On ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres de l'égalité ;
- On multiplie ou divise par un même nombre (différent de 0) les deux membres de l'égalité.

*Pour mieux comprendre…*

Si **A**, **B** et **k** désignent des nombres (**k** ≠ 0),
alors les égalités suivantes ont les mêmes solutions.

$$\begin{array}{lrcl} & \mathbf{A} & = & \mathbf{B} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A + k} & = & \mathbf{B + k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A - k} & = & \mathbf{B - k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A \times k} & = & \mathbf{B \times k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A \div k} & = & \mathbf{B \div k} \end{array}$$

« Autrement dit, une équation est comme une balance…
Pour que l'équilibre reste le même à chaque étape, il faut effectuer la même transformation des deux côtés de l'égalité… »



« **Egalité = équilibre** »

**EXERCICE TYPE 3** ***Equation de la forme $ax + b = cx + d$***

Résoudre l'équation $7x - 1 = 3x + 5$.

*Solution*

$$7x - 1 = 3x + 5$$

☞ Pour « regrouper les $x$ » dans un même membre,
on soustrait $3x$ à chaque membre de l'égalité : $7x - 1 \mathbf{- 3x} = 3x + 5 \mathbf{- 3x}$
On réduit : $4x - 1 = \mathbf{5}$

☞ Pour « isoler le terme en $x$ »,
on ajoute 1 à chaque membre de l'égalité : $4x - 1 \mathbf{+ 1} = 5 \mathbf{+ 1}$
On réduit : $4x = 6$

☞ Pour trouver la valeur de $x$,
on divise par 4 chaque membre de l'égalité : $4x \mathbf{\div 4} = 6 \mathbf{\div 4}$
On réduit : $x = \mathbf{\frac{6}{4}} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

*Vérification* : Avant de conclure, on teste l'égalité avec la calculatrice.

$7 \times \frac{3}{2} - 1 = \mathbf{9{,}5}$ et $3 \times \frac{3}{2} + 5 = \mathbf{9{,}5}$ donc l'égalité est bien vraie pour $x = \frac{3}{2}$.

*Conclusion* : L'équation $3x + 1 = 7x - 2$ a une solution : $\mathbf{x = \frac{3}{4} = 0{,}75}$

## IV. Résoudre une équation-produit nul

*Propriété* Si un produit est égal à 0, alors l'un de ces facteurs est égal à 0.

**EXERCICE TYPE 4** ***Equation-produit nul de la forme*** $(ax + b)(cx + d) = \mathbf{0}$

Résoudre l'équation suivante : $(3x - 1)(7x + 2) = 0$

*Solution* D'après la propriété ci-dessus, comme le produit est nul, alors l'un de ces facteurs $(3x - 1)$ ou $(7x + 2)$ est égal à 0.

Donc : soit $3x - 1 = 0$ soit $7x + 2 = 0$

$3x = 1$ $7x = -2$

$x = \frac{1}{3}$ $x = -\frac{2}{7}$

L'équation $(3x - 1)(7x + 2) = 0$ a donc deux solutions : $x = \frac{1}{3}$ et $x = -\frac{2}{7}$.

## V. Résoudre une équation de la forme $x^2 = a$

*Propriété*

Si $\boldsymbol{a}$ est un nombre positif donné, l'équation $\boldsymbol{x^2 = a}$ a deux solutions $\boldsymbol{x} = -\sqrt{\boldsymbol{a}}$ et $\boldsymbol{x} = \sqrt{\boldsymbol{a}}$ .

**EXERCICE TYPE 5** ***Equation de la forme*** $\boldsymbol{x^2 = a}$

Résoudre les deux équations suivantes : ***1.*** $x^2 = 25$ ***2.*** $x^2 = 17$

*Solution*

**1.** L'équation $x^2 = 25$ a deux solutions :
soit $x = \sqrt{25} = \mathbf{5}$, soit $x = -\sqrt{25} = \mathbf{-5}$.

**2.** L'équation $x^2 = 17$ a deux solutions :
soit $x = \sqrt{17}$ , soit $x = -\sqrt{17}$

*Vérification* : avant de conclure, ne pas oublier de vérifier…

**1.** $5^2 = 25$ et $(-5)^2 = 25$.

**2.** $(\sqrt{17})^2 = 17$ et $(-\sqrt{17})^2 = 17$


**EXERCICE TYPE 6** ***Extrait de brevet…***

**1.** Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ, alors le programme renvoie $-5$.

**2.** Que renvoie le programme si on choisit au départ :

**a.** le nombre 5 ?

**b.** le nombre $-4$ ?

**3.** Déterminer le(s) nombre(s) qu'il faut choisir au Départ pour le programme renvoie 0.

*Solution*

**1.** Si on choisit 2 comme nombre de départ, on obtient : $2\times2 - 9 = 4 - 9 = \mathbf{-5}$.

**2.** Si on choisit 5 comme nombre de départ : $5\times5 - 9 = 25 - 9 = \mathbf{16}$
Si on choisit $-4$ comme nombre de départ : $(-4)\times(-4) - 9 = 16 - 9 = \mathbf{7}$

**3.** On souhaite déterminer les nombres $x$ qu'il faut choisir au départ pour le programme renvoie 0, c'est-à-dire les nombres $x$ solutions de l'équation $x^2 - 9 = 0$.
Autrement dit : $x^2 - 9 = 0$
$x^2 = 9$
soit $x = \sqrt{9} = \mathbf{3}$, soit $x = -\sqrt{9} = \mathbf{-3}$.
Pour que le programme renvoie 0, il faut choisir au départ les nombres 3 ou $-3$.

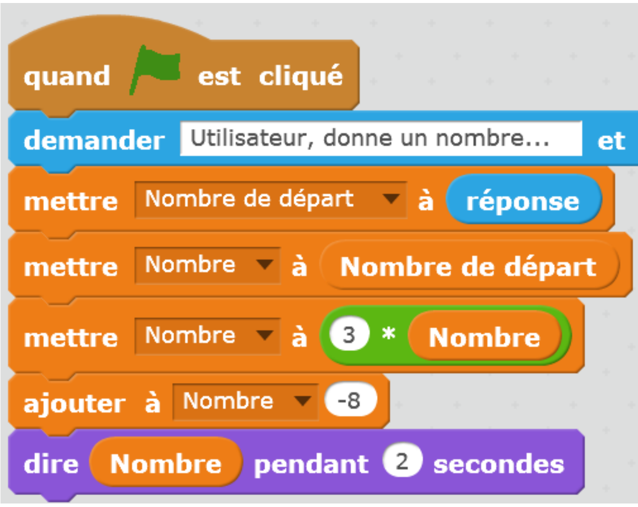
## VI. *Modélisation une situation à l'aide d'une équation*

*Méthode* Pour modéliser une situation où l'on chercher un nombre inconnu, on peut **mettre en équation** le problème :

- ***Choix de l'inconnue*** : on choisit l'inconnue en fonction de ce que l'on cherche.
- ***Traduction de l'énoncé*** : on traduit les données de l'énoncé en une équation.
- ***Résolution de l'équation*** : on résout l'équation (cf. paragraphe précédent).
- ***Vérification*** : on teste la solution dans le problème pour vérifier…
- ***Conclusion*** : on interprète la solution pour répondre au problème.

**EXERCICE TYPE 7**

On considère le programme de calcul présenté ci-contre sur Scratch.




| |
|---|
| $x$ |
| $3x$ |
| $3x - 8$ |

Quel est le nombre donné initialement par l'utilisateur si, à la fin du programme, le lutin affiche « $-65$ » ?

*Solution*

- *Choix de l'inconnue* : Notons $x$ le nombre donné initialement par l'utilisateur.
- *Traduction de l'énoncé* : Le problème proposé revient à trouver le nombre $x$ tel que :
$$3x - 8 = -65$$
- *Résolution de l'équation* :
$$3x - 8 = -65$$
$$3x - 8 \mathbf{+ 8} = -65 \mathbf{+ 8}$$
$$3x = -57$$
$$3x \mathbf{\div 3} = -57 \mathbf{\div 3}$$
$$x = \mathbf{-19}$$
- *Vérification* : $3\times(-19) - 8 = -57 - 8 = -65$
- *Conclusion* : Pour que le lutin affiche « $-65$ », le nombre donné initialement par l'utilisateur doit être $\mathbf{-19}$.