Fiche n°4

UTILISER DES EXPRESSIONS LITTERALES POUR RESOUDRE DES PROBLEMES

I. *Développer et factoriser*

Rappels de 4ème (à savoir)

Développer un produit, c'est transformer ce produit en une somme (ou une différence).

Factoriser une somme (ou une différence), c'est la transformer en un produit.

Développer

Produit (×) Somme (+) ou différence (−)

Factoriser

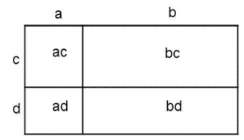
Distributivité simple $\boxed{\mathbf{a(b+c) = ab + ac}}$.

produit somme ou différence

On dit que **a** est un « ***facteur commun*** »…

Illustration pour mieux comprendre :

l'aire du grand rectangle est égale à la somme des aires des 4 petits rectangles.



Distributivité double $\boxed{\mathbf{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}}$.

produit sommes et/ou différences

Propriété (identique remarquable)

Pour tout nombre **a** et **b**, on a : $\boxed{\mathbf{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}}$

différence de deux carrés produit

EXERCICE TYPE 1 **Transformer une expression littérale**

1. Factoriser les expressions suivantes :
   A = $5x - 7x$; B = $9x^2 - 4x^2$; C = $5x + 7\times5$; D = $4(x+1) + (x+1)(x-2)$; E = $9 - x^2$
2. Réduire les expressions suivantes :
   G = $9x^2 + 6x - 7 - 4x^2 + 2$; H = $2x\times5 - 8 - 3x$; L = $2x\times5\times3x$
3. Développer et réduire les expressions suivantes :
   M = $8(x+3)$; N = $2x(5x-1)$; O = $-(3x^2-1+2x)$; P = $(3x-2)(-2x+1)$; R = $(x-5)(x+5)$

Solution

1. M = $5\underline{x} - 7\underline{x} = (5 - 7)\underline{x} = -2x$; O = $9\underline{x^2} - 4\underline{x^2} = (9 - 4)\underline{x^2} = 5x^2$

   R = $4\underline{(2x+1)} + \underline{(2x+1)}(x-1) = \underline{(2x+1)}\,[4+(x-1)] = (2x+1)\,[4+x-1] = (2x+1)(x+3)$

   On dit que $(2x+1)$ est le ***facteur commun***.

2. S = $9x^2 + 6x - 7 - 4x^2 + 2 = 5x^2 + 6x - 5$
   T = $2x\times5 - 8 - 3x = 10x - 8 - 3x = 7x - 8$
   U = $2x\times5\times3x = 2\times5\times3 \times x\times x = 30x^2$

3. $H = 8(x + 3) = 8\times x + 8\times 3 = 8x + 24$

$K = 2x(5x - 1) = 2x\times 5x - 2x\times 1 = 10x^2 - 2x$

$L = -(3x^2 - 1 + 2x) = -3x^2 + 1 - 2x$

« On distribue le signe moins ».
Le calcul est le même que :
(–1) **×** $(3x^2 - 1 + 2x)$.

Cela revient donc à
changer tous les signes
à l'intérieur des parenthèses…

$J = (3x - 2)(-2x + 1) = 3x\times(-2x) + 3x\times 1 + (-2)\times(-2x) + (-2)\times 1$

$= -6x^2 + 3x + 4x - 2 = -6x^2 + 7x - 2$

II. *Justifier ou réfuter une affirmation générale ?*

EXERCICE TYPE 2 Est-il vrai que, pour n'importe quel nombre entier positif $n \geq 0$, le nombre $n^2 - n + 11$ a exactement deux diviseurs ? Justifier.

<u>*Solution*</u>

Recherche : commençons par tester l'affirmation pour plusieurs nombres :

¤ Pour **n** = 0, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 0^2 - 0 + 11 = 11$.
11 est un nombre premier qui a donc que deux diviseurs 1 et 11.

¤ Pour **n** = 1, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 1^2 - 1 + 11 = 11$.
11 est un nombre premier qui a donc que deux diviseurs 1 et 11.

¤ Pour **n** = 2, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 2^2 - 2 + 11 = 13$.
13 est un nombre premier qui a donc que deux diviseurs 1 et 13.

¤ Pour **n** = 3, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 3^2 - 3 + 11 = 17$.
17 est un nombre premier qui a donc que deux diviseurs 1 et 17.

¤ Pour **n** = 4, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 4^2 - 4 + 11 = 23$.
23 est un nombre premier qui a donc que deux diviseurs 1 et 23.

¤ Pour **n** = 5, on a : $\boldsymbol{n^2 - n + 11} = 5^2 - 5 + 11 = 31$.
31 est un nombre premier qui a donc que deux diviseurs 1 et 31.

¤ Pour pouvoir essayer rapidement plusieurs nombres, on peut <u>utiliser un tableur</u> : pour un nombre ***n*** dans la cellule A1, on utilise la formule **=A1^2 – A1 + 11** dans la cellule B1.

Avec la <u>recopie automatique</u>, on obtient ainsi la feuille de calcul ci-contre.

On remarque alors que, pour ***n*** = 11, le résultat obtenu est 121 qui a trois diviseurs : 1, 11 et 121.

	A	B
1		=A1^2-A1+11
2	1	11
3	2	13
4	3	17
5	4	23
6	5	31
7	6	41
8	7	53
9	8	67
10	9	83
11	10	101
12	11	121
13	12	143

Conclusion : comme nous avons trouvé un **<u>contre-exemple</u>**, l'affirmation « Le nombre $\boldsymbol{n^2 - n + 11}$ a exactement deux diviseurs pour n'importe quel nombre entier positif $\boldsymbol{n} \geq 0$ » est donc **fausse**.

<u>*A savoir*</u> Pour démontrer qu'une affirmation générale est fausse,
il suffit de **trouver un contre-exemple.**

EXERCICE TYPE 3 Est-il vrai que ces deux programmes ci-dessous donnent toujours le même résultat lorsque l'on choisit le même nombre de départ ? Justifier.

Programme n°1

Programme n°2

<u>*Solution*</u>

Recherche : Commençons par tester l'affirmation pour plusieurs exemples de nombres :

¤ Pour **A** = 0 : - Programme 1 : 0+3 = 3 ; 3 × 2 = 6 ; 6 – 5 =1
- Programme 2 : 0 × 2 = 0 ; 0 + 1 = 1

Les programmes 1 et 2 donnent le même résultat **1.**

¤ De même, on peut vérifier que :
- Pour **A** = 1, le programme 1 donne **3** comme résultat et le programme 2 donne **3**.
- Pour **A** = 2, le programme 1 donne **5** comme résultat et le programme 2 donne **5**.
- Pour **A** = 3, le programme 1 donne **7** comme résultat et le programme 2 donne **7**.

¤ Essayons même pour un autre nombre au hasard, par exemple pour **A** = 20 : le programme 1 donne **41** comme résultat et le programme 2 donne **41**…

¤ On peut essayer aussi avec le logiciel Scratch pour obtenir un plus grand nombre de résultats ou avec un tableur comme à la question précédente…

Conjecture : <u>il semble que</u>, pour n'importe quel nombre A choisi au départ, les deux programmes donnent toujours le même résultat…

Méthode : utilisons la lettre x pour représenter n'importe quel nombre choisi au départ.

Calculs : Le programme de calcul n°1 revient à effectuer le calcul :

$$P_1 = (x+3)\times 2 - 5 = 2(x+3) - 5$$

Le programme de calcul n°2 revient à effectuer le calcul :

$$P_2 = x \times 2 + 1 = 2x + 1$$

Pour voir si les résultats donnent toujours le même résultat, transformons ces expressions littérales sous une même forme développée :

$$P_1 = 2(x + 3) - 5 = 2x + 6 - 5 = 2x + 1 = P_2$$

Autrement dit, si x est le nombre choisi au départ, le résultat sera toujours $2x + 1$…

Conclusion : il est donc **vrai** que ces deux programmes donnent toujours le même résultat lorsque l'on choisit le même nombre de départ.

<u>*A savoir*</u> Pour essayer de démontrer que deux programmes numériques sont toujours égaux pour n'importe quel nombre de départ, on utilise **une lettre pour représenter le nombre choisi au départ**…

EXERCICE TYPE 4 Montrer que, si deux nombres entiers sont des multiples de 9, alors leur somme est également un multiple de 9.

Solution

Recherche : Après plusieurs essais, il semble que la propriété soit toujours vraie, pour n'importe quels nombres multiples de 9.

Méthode : **Utilisons des lettres pour montrer que la propriété est vraie pour n'importe quel nombre multiple de 9.**

Soit **n** et **m** deux entiers qui sont multiples de 9, alors il existe deux entiers **q** et **p** tels que : **n = 9q** et **m = 9p**.

La somme de n et de m est alors : **n+m** = **9q+9p** = **9(q+p)** (voir distributivité simple en 4e)
Autrement dit, 9 divise bien aussi la somme **n+m** puisque **(q+p)** est aussi un entier…

Conclusion : On a donc bien démontré que, pour n'importe quels nombres multiples de 9, leur somme sera aussi un multiple de 9.

A savoir Pour démontrer une propriété pour n'importe quel nombre (cf. ex-type 4), on utilise **des écritures littérales à connaître**.

Avec **k**, **n**, **p** et **q** des nombres entiers, on a les écritures générales suivantes :

- Nombre **pair** : **2k**
- Nombre **impair** : **2p+1**
- **Multiple de 7** : **7p**
- **Multiple de 13** : **13q**
- **Entier suivant** un entier **n** : **n+1**
- **Entier précédent** un entier **n** : **n–1**

EXERCICE TYPE 5 La somme de trois nombres entiers positifs consécutifs est-elle toujours divisible par 3 ?

Solution de la question ***3*** *:*

Recherche : commençons par tester l'affirmation pour plusieurs nombres entiers positifs consécutifs :

¤ Pour les trois nombres consécutifs 0, 1 et 2 :
la somme de ces trois nombres est 0 + 1 + 2 = 3 qui est bien un multiple de 3.

¤ De même :
- Pour les trois nombres consécutifs 1, 2 et 3 : 1 + 2 + 3 = 6 et 6 est un multiple de 3
- Pour les trois nombres consécutifs 2, 3 et 4 : 2 + 3 + 4 = 9 et 9 est un multiple de 3
- Pour les trois nombres consécutifs 3, 4, 5 : 3 + 4 + 5 = 12 et 12 est un multiple de 3

¤ Essayons même avec trois nombres entiers positifs consécutifs au hasard :
Pour 11, 12 et 13 : 11 + 12 + 13 = 36 et 36 = 3 × 12 est encore bien divisible par 3…

Conjecture : il semble que cette proposition soit toujours vraie…

Méthode et calculs : notons **n** le premier des trois nombres entiers positifs.
Le nombre suivant est alors : **n+1**, et le nombre suivant sera : **n+2**.
La somme de ces trois nombres entiers positifs consécutifs est alors égale à :

$$\mathbf{n} + \mathbf{n} + 1 + \mathbf{n} + 2 = 3\mathbf{n} + 3 = 3(\mathbf{n} + 1).$$

Comme le résultat est le produit de 3 par un entier, c'est bien un multiple de 3.

Conclusion : on a donc démontré que, pour n'importe quels trois nombres entiers positifs consécutifs, leur somme est toujours un multiple de 3.

Remarque (autre démonstration possible) :

Représentons par la lettre **n** le deuxième des trois nombres entiers positifs consécutifs.
L'entier précédent sera alors **n–1**, et l'entier suivant sera **n+1**.
La somme de ces trois nombres est alors : $(\mathbf{n}-1) + \mathbf{n} + (\mathbf{n}+1) = 3n$
Ainsi, le résultat obtenu est 3**n** et sera donc bien toujours divisible par 3, quel que soit le nombre **n** choisi.