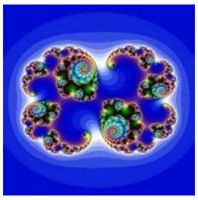
Fiche n°16

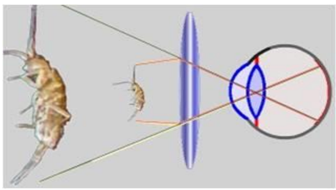
TRANSFORMER DES FIGURES : SYMETRIES, TRANSLATION ET ROTATION

Préliminaire (exposé oral d'introduction, non présent dans le cahier de l'élève)

Dans la nature, en arts plastiques, en architecture, en sciences de la vie et de la terre, en optique, etc., on utilise régulièrement des transformations de figures…
Voici quelques exemples originaux :


Papillon (symétrie axiale)


Fractale (symétrie centrale)

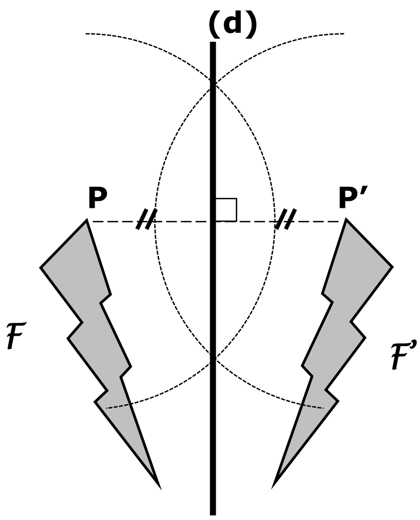
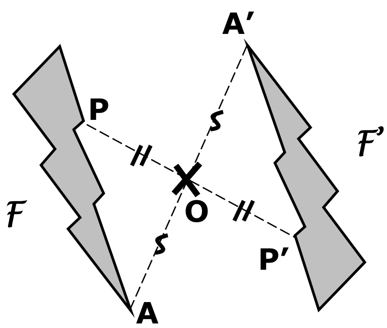

Loupe (agrandissement)


Miroir cylindrique (anamorphose)

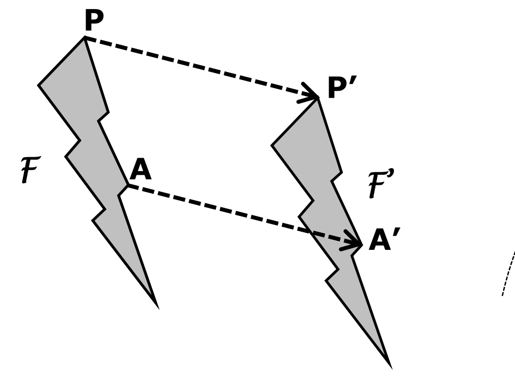
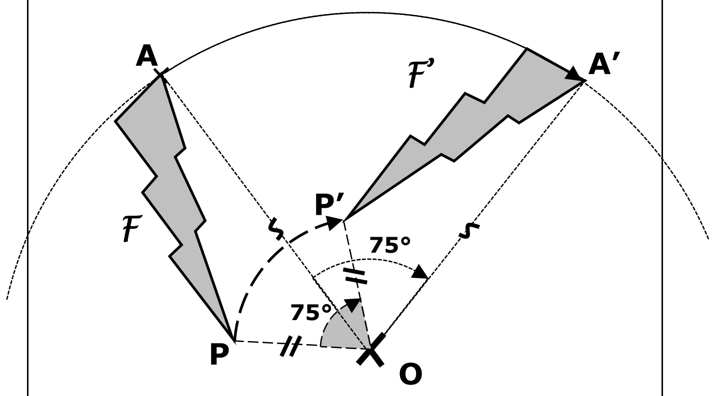

Œuvre d'Escher (translation)

Jusqu'à la 6ème, la symétrie axiale a été étudiée : celle-ci est par exemple présente dans la nature (papillon). Puis, en 5ème, grâce à la symétrie centrale, on peut obtenir de fantastiques figures (fractale). En 4ème, de nouvelles transformations géométriques vont être étudiées : la translation et la rotation…
Mais il y en a encore d'autres, comme l'anamorphose : hors programme…

I. *Les transformations vues en 6ème et en 5ème (rappels)*

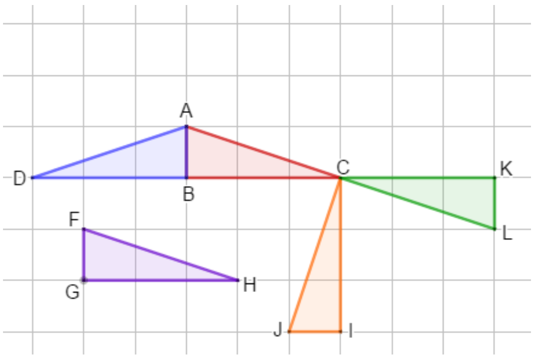
	Symétrie axiale *(rappel 6ème)*	**Symétrie centrale** *(rappel 5ème)*
Principe	**Plier** le long d'une **droite** (miroir)	Effectuer un **demi-tour** autour d'un **point**
Vocabulaire	P' est le **symétrique** du point P **par rapport à la droite (d)**. La droite **(d)** est l'**axe** de symétrie.	P' est le **symétrique** du point P **par rapport au point O** Le point **O** est le **centre** de symétrie.
Figure		
Notion clé	L'axe de symétrie **(d)** est la **médiatrice** de tous les segments qui relient un point **P** et son symétrique **P'**.	Le centre de symétrie **O** est le **milieu** de tous les segments qui relient un point **P** et son symétrique **P'**.

II. *Deux nouvelles transformations : translation et rotation*

	Translation	**Rotation**
Principe	**Glisser** selon une **direction,** un **sens** et une **longueur donnée**. (« un déplacement sans tourner »)	**Tourner** d'un **angle donné** autour d'un **point**.
Vocabulaire	P' est l'**image** du point P par la translation qui transforme le point A en A'.	P' est l'**image** du point P par la rotation de **centre O** et d'**angle** 75° dans le **sens** des aiguilles d'une montre. On appelle **sens direct** le **sens inverse** des aiguilles d'une montre.
Figure		
Notion clé	Le quadrilatère PP'A'A est un **parallélogramme**.	Le triangle POP' est **isocèle en O** tel que l'angle $\widehat{POP'}$ mesure 75°.

EXERCICE TYPE 1 **EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR UNE FIGURE**

La figure ci-contre est constituée de cinq triangles rectangles égaux obtenus à l'aide du logiciel Geogebra.



1. Décrire la transformation qui permet de passer :
   - **a.** du triangle rouge ABC au triangle bleu ADB ?
   - **b.** du triangle rouge ABC au triangle violet FGH ?
   - **c.** du triangle rouge ABC au triangle orange CIJ ?
   - **d.** du triangle rouge ABC au triangle vert CKL ?
2. Sur cette figure, construire la figure obtenue si :
   - **a.** on transforme le triangle rouge ABC par une translation qui transforme C en A.
   - **b.** on transforme le triangle rouge ABC par une rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

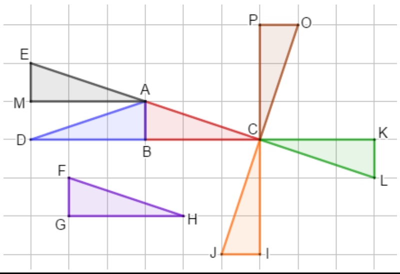
Solution

1. **a.** La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle bleu ADB est la **symétrie d'axe (AB)**.
   b. La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle violet FGH est la **translation qui transforme le point A en F.**
   c. La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle orange CIJ est la **rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens direct** (autrement dit, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre).
   d. La transformation qui permet de passer du triangle ABC au triangle vert CKL est la **symétrie centrale de centre C**.

2. Sur la figure ci-contre, on obtient :

a. le triangle AME si on transforme le triangle ABC par une translation qui transforme C en A.

b. le triangle POC si on transforme le triangle ABC par une rotation de centre C et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.



III. *Les propriétés de ces transformations…*

Propriété Pour chacune des transformations de cette leçon (symétries axiale ou centrale, translation ou rotation), **la figure $\mathcal{F}$ et sa figure image $\mathcal{F}'$ sont superposables** (on dit aussi qu'elles sont « égales » comme les triangles égaux…).

On dit que ces **transformations conservent les longueurs, la mesure des angles** (y compris les angles droits), **les aires, le parallélisme et l'alignement**.

Exemples Grâce à cette propriété générale, on peut écrire plusieurs propriétés du type « Si … alors… ». Par exemple :

- **Si** deux segments sont symétriques par rapport à un point O, **alors** ces deux segments ont la même longueur.
- **Si** un angle est l'image d'un autre par une rotation, **alors** ces deux angles ont la même mesure.
- **Si** une figure est l'image d'un autre par une translation, **alors** ces deux figures ont la même aire.

Remarque Ces propriétés de conservation ne sont pas vraies pour toutes les transformations, comme par exemple pour un agrandissement ou une réduction…

EXERCICE TYPE 2 **EFFET DE TRANSFORMATIONS SUR LES GRANDEURS**

Le pavage représenté sur la figure 1 est réalisé à partir d'un motif appelé pied-de-coq qui est présent sur de nombreux tissus utilisés pour la fabrication de vêtements.
Le motif pied-de-coq est représenté par le polygone représenté sur la figure 2, réalisé à l'aide d'un quadrillage régulier.

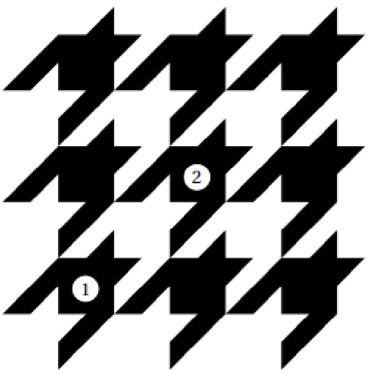


Figure 1

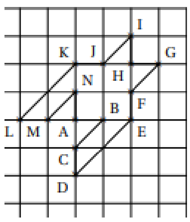


Figure 2

1. Sur la figure 1, quel type de transformation géométrique permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 ?

2. Dans cette question, on considère que : AB = 1 cm (figure 2).

a. Montrer que l'aire du motif pied-de-coq de la figure 2 est 8 cm².

b. Déterminer l'aire de tout le pavage. Justifier.

<u>Solution</u>

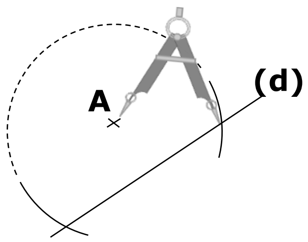
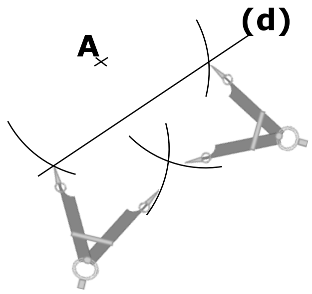
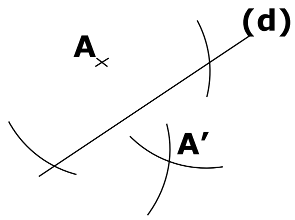
1. La transformation géométrique qui permet d'obtenir le motif 2 à partir du motif 1 est une translation.

2. **a.** Le motif comprend 4 carrés du quadrillage et 8 triangles rectangles comme FGH.
Comme AB = 1 cm, chaque carré du quadrillage a une aire de 1 cm².
De même, chaque triangle rectangle est en fait un demi-carré d'aire 0,5 cm².
L'aire d'un motif est donc 4×1 + 8×0,5 = 8 cm².

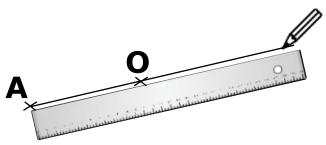
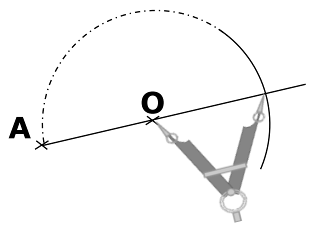
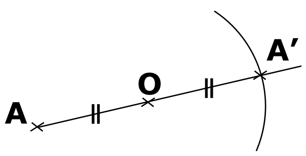
b. Le pavage est constitué de 9 motifs obtenus par translation…
D'après la leçon, une translation transforme une figure en une figure superposable et donc de même aire…
Donc chaque motif a une aire 8 cm².
Et l'aire du pavage est donc 9×8 = 72 cm².

IV. *Pour aller plus loin : les constructions au compas…*

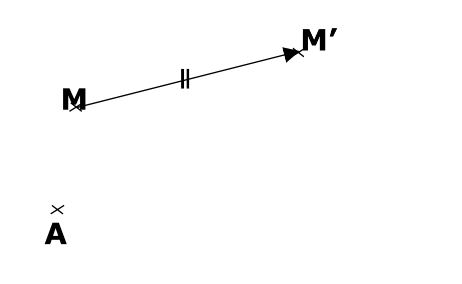
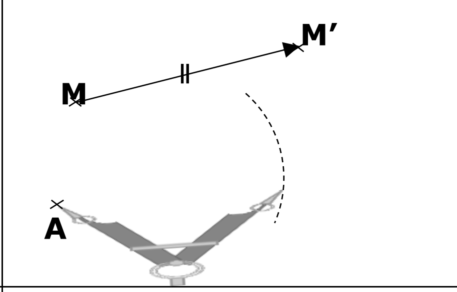
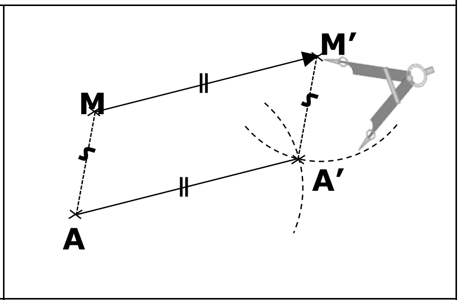
Symétrie axiale *(rappel)*

Exemple : Construire le point A' tel que les points A et A' soient symétriques **par rapport à (d)**.		
		
Avec Le compas, on place deux points sur la droite (**d**).	**Sans changer l'écartement** du compas, on trace deux arcs de cercle de l'autre côté de l'axe.	On place le point A' à l'**intersection** des deux arcs de cercle.
On laisse tous les **traits de construction visibles**.		

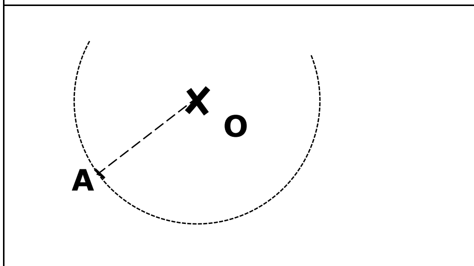
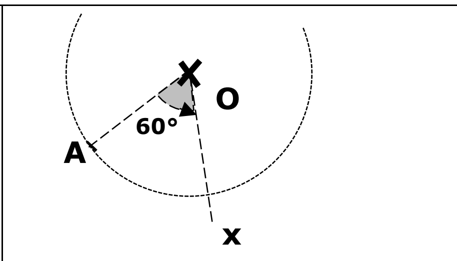
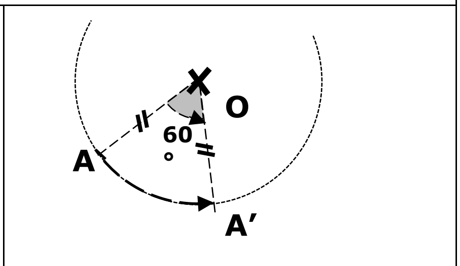
Symétrie centrale *(rappel)*

Exemple : Construire le point A' tel que les points A et A' soient symétriques **par rapport à O**.		
		
Avec la règle (sans utiliser les graduations), on trace la **demi-droite** [AO).	**Avec le compas,** on **reporte** à partir du point O la longueur AO sur la demi-droite [AO).	On place le point A' à l'**intersection** de la demi-droite et de l'arc de cercle.
On **code** la figure et on laisse tous les **traits de construction visibles**.		

Translation

<table>
<tr><td colspan="3">Exemple : Construire le point A’ image du point A par la translation qui transforme M en M’.</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>On cherche à vue d’œil où doit être le point A’ pour que le AMM’A’ soit un parallélogramme. (figure à main levée…)</td>
<td>Avec le compas, on reporte la longueur MM’ à partir du point A.</td>
<td>On reporte la longueur AM à partir du point M’ et on place le point A’ à l’intersection de deux arcs de cercle…</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">On code la figure et on laisse tous les traits de construction visibles.</td></tr>
</table>

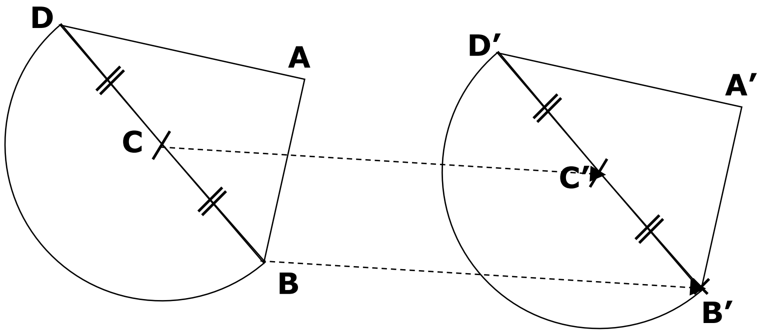
Rotation

<table>
<tr><td colspan="3">Exemple : Construire le point A’ image du point A par la rotation de centre O et d’angle 60° dans le sens direct.</td></tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>Avec le compas, on construit un arc de cercle de centre O et de rayon OA.</td>
<td>A vue d’œil, on s’assure du sens de la rotation.
On construit l’angle $\widehat{AOx}$ de 60° dans le sens donné…</td>
<td>On place l point A’ à l’intersection de la demi-droite et de l’arc de cercle…</td>
</tr>
<tr><td colspan="3">On code la figure et on laisse tous les traits de construction visibles.</td></tr>
</table>

EXERCICE TYPE 3

Dans chaque cas, construire précisément avec les outils de géométrie la figure image par la transformation indiquée.

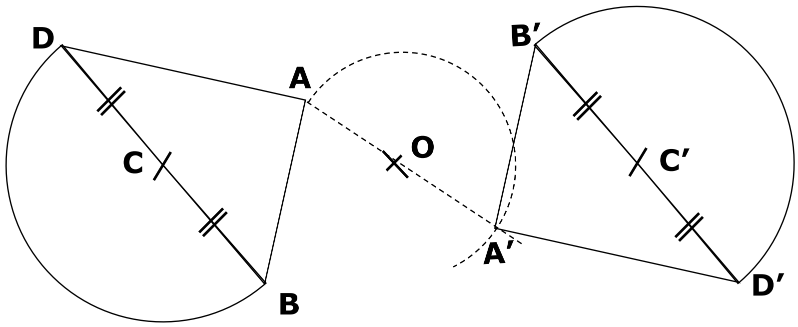
1. **Translation « de B vers B’ »**



Par exemple, pour construire l’image du point C’, on construit au compas le parallélogramme B’BCC’…

Et on construit de même A’ et D’.

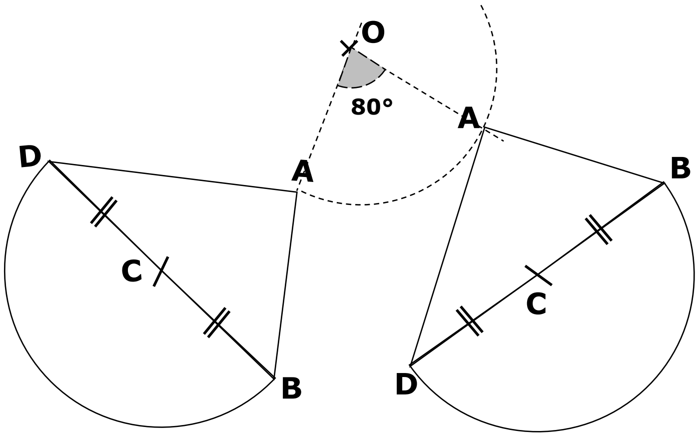
2. Symétrie centrale de centre O



Par exemple, pour construire l'image du point A', on construit la demi-droite [AO) et le demi-cercle de centre O passant par A…

Et on construit de même B', C' et D'.

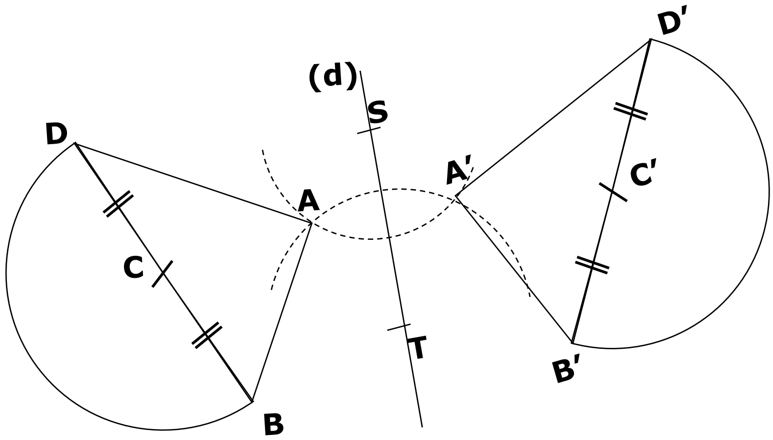
3. Rotation de centre O et d'angle 80° dans le sens direct



Par exemple, pour construire l'image du point A', on construit l'angle de côté [AO] et d'angle 80° dans le sens direct, et le cercle de centre O…

Et on construit de même B', C' et D'.

4. Symétrie axiale d'axe (d)



Par exemple, pour construire l'image du point A', on choisit deux points S et T sur l'axe (d) et on reporte au compas les longueurs SA et TA de l'autre côté de l'axe…

Et on construit de même B', C' et D'.