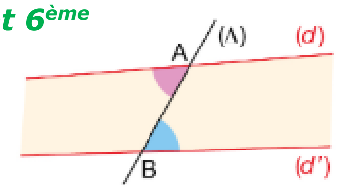
Fiche n°15

UTILISER LE THEOREME DE THALES…

I. Angles et droites parallèles : mes propriétés vues en 5ème et 6ème

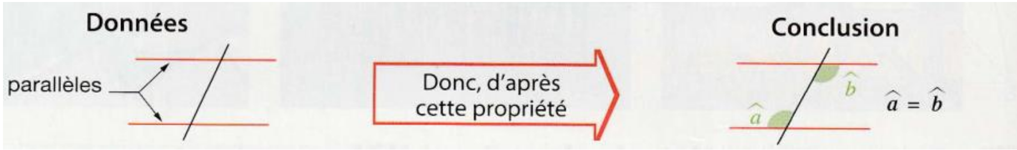


1. Angles alternes-internes

Définition Deux angles sont dits **alternes internes** si :
- les angles sont situés de chaque côté de la sécante (Δ) > *« Alternes »*
- les angles sont situés entre les deux droites (*d*) et (*d'*) > *« Internes »*

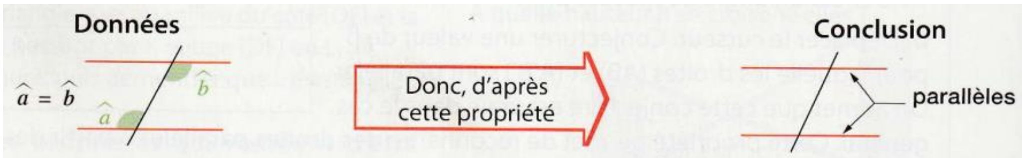
Propriété (admise) **Pour montrer que deux angles sont égaux**

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante,
alors les angles alternes-internes sont égaux.

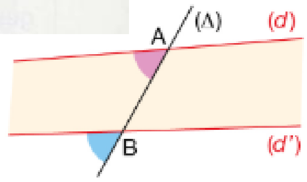


Propriété (admise) **Pour montrer que deux droites sont parallèles**

Si deux droites coupées par une sécante formant des angles alternes-internes égaux,
alors ces droites sont parallèles.



2. Angles correspondants



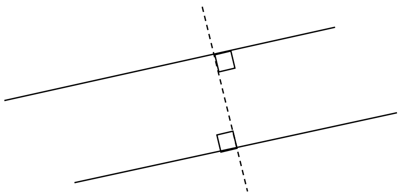
Définition Deux angles sont dits **correspondants** si,
- les angles sont situés du même côté de la sécante (Δ)
- un angle est « interne » (entre les deux droites (*d*) et (*d'*)) et l'autre « externe »…

Propriétés (admises) **Droites parallèles et angles correspondants**

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante,
alors les angles correspondants sont égaux.

Si deux droites coupées par une sécante formant des angles correspondants égaux,
alors ces droites sont parallèles.

3. Droites perpendiculaires et droites parallèles



En appliquant les propriétés des angles alternes-internes ci-dessus avec des angles droits, cela permet de démontrer les propriétés sur le parallélisme et la perpendicularité vues en 6ème.

Propriétés **Pour montrer que deux droites sont parallèles, ou perpendiculaires**

Si deux droites sont parallèles,
alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième,
alors elles sont parallèles entre elles.

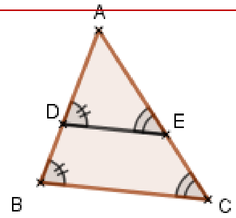
II. *Droites parallèles et triangles semblables : vers le théorème de Thalès…*

Théorème de Thalès

Dans un triangle ABC où D et E sont des points des côtés [AB] et [AC],
si les droites (BC) et (DE) sont parallèles,

alors les triangles ADE et ABC sont semblables.

et alors on peut écrire les égalités de rapports : $\mathbf{\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}}$



Démonstration du théorème

1ère étape :

On sait donc que :
- les droites (BC) et (DE) coupées par la sécante (BD) forment des angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ABC}$ qui sont correspondants ;
- Les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

D'après la leçon (paragraphe I), si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants sont égaux.
On peut donc conclure que $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.

2e étape :

Les triangles ADE et ABC ont l'angle $\widehat{DAE}$ en commun et deux angles égaux deux à deux puisque l'on vient de démontrer que $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.
D'après la leçon (voir chapitre sur les triangles semblables), si deux triangles ont deux angles de même mesure, alors ils sont semblables.
Donc les triangles ADE et ABC sont semblables.

3e étape :

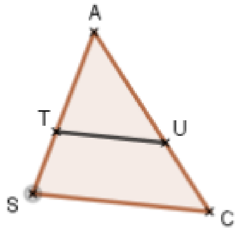
D'après la question précédente, on sait que les ADE et ABC sont semblables.
D'après la leçon (voir chapitre sur les triangles semblables), si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

On a donc : *Triangle ADE* / *Triangle ABC* $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{DE}{BC}$

Côtés opposés à E et C — *Côtés opposés à D et B* — *Côtés opposés à A*

EXERCICE TYPE 1

On considère la figure ci-contre (qui n'est pas en vraie grandeur !)
avec AU = 4 cm, TU = 3 cm et AC = 6 cm.
On précise que les droites (TU) et (SC) sont parallèles.
Déterminer la longueur du segment [SC].



Solution

D'après la figure, les points T et U sont des points des côtés [AS] et [AC].
D'après l'énoncé, on sait aussi que les droites (TU) et (SC) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, les triangles ATU et ASC sont semblables

Donc $\dfrac{AT}{AS} = \dfrac{AU}{AC} = \dfrac{TU}{SC}$ soit $\dfrac{AT}{AS} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{3}{SC}$ d'où (produit en croix) : $SC = \dfrac{3 \times 6}{4} = 4{,}5$ cm.

III. Réciproque du théorème de Thalès : pour démontrer que deux droites sont parallèles…

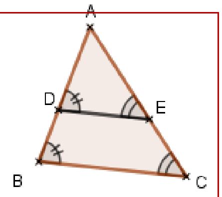
Réciproque du théorème de Thalès (admise)

Si deux droites (BD) et (CE) sont sécantes en A telles que :

¤ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$

¤ les points A, D, B et les points A, E, C sont alignés dans le même ordre,

alors les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

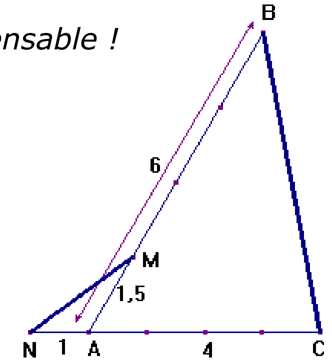


Remarque : *La donnée « alignés **dans le même ordre** » est indispensable !*

Etudions ***un contre-exemple*** avec la figure ci-contre.

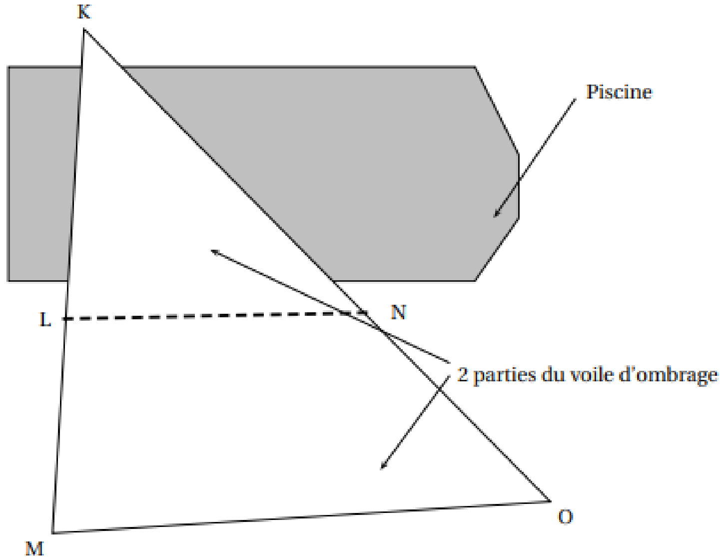
Sur la figure ci-contre, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = 0{,}25$.

Les rapports sont bien égaux, comme dans le théorème de Thalès, mais les droites (MN) et (BC) ne sont pas du tout parallèles !
Pourtant les points A, M, B et les points A, N, C sont chacun alignés, **mais pas dans le même ordre**…



EXERCICE TYPE 3

Thibaut décide d'installer, au-dessus de sa piscine, une grande voile d'ombrage qui se compose de deux parties détachables reliées par une fermeture éclair comme le montre le schéma ci-dessous qui n'est pas à l'échelle.



Données :

• la première partie couvrant une partie de la piscine est représentée par le triangle KLN ;
• la deuxième partie est représentée par le trapèze LMON de bases [LN] et [MO] ;
• la fermeture éclair est représentée par [LN] ;
• les poteaux, soutenant la voile d'ombrage positionnés sur les points K, L et M, sont alignés, tout comme les poteaux soutenant la voile d'ombrage positionnés sur les points K, N et O.
• Les dimensions de la toile sont : KM = 8,5 m, KO = 12,75 m et MO = 10,2 m.

1. Montrer que si Thibaut place la fermeture éclair tel que KL = 5 m et KN = 7,5 m alors la fermeture éclair [LN] sera parallèle au côté [MO] de la toile.

2. En déduire la longueur de la fermeture éclair.

<u>Solution</u>

Pour bien voir la situation, ne pas oublier d'indiquer toutes les données sur la figure !

1. La question revient à démontrer que les droites (LN) et (MO) sont parallèles ou non.

Comparons les rapports $\frac{KL}{KM}$ et $\frac{KN}{KO}$: $\frac{KL}{KM} = \frac{5}{8,5} = \mathbf{\frac{10}{17}}$ et $\frac{KN}{KO} = \frac{7,5}{12,75} = \mathbf{\frac{10}{17}}$

On sait donc que les droites (UT) et (PE) sont donc sécantes en A telles que :

¤ $\frac{KL}{KM} = \frac{KN}{KO}$;

¤ Les points K, L et M d'une part et les points K, N et O d'autre part sont alignés <u>dans le même ordre</u>.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (LN) et (MO) sont donc parallèles, c'est à dire que la fermeture éclair [LN] est bien parallèle au côté [MO] de la toile.

2. D'après les données, les points L et N sont des points des côtés [KM] et [KO].
D'après la question précédente, on sait que les droites (LN) et (MO) sont parallèles.
D'après le théorème de Thalès, les triangles KLN et KMO sont semblables

Donc $\frac{KL}{KM} = \frac{KN}{KO} = \frac{LN}{MO}$ soit $\frac{5}{8,5} = \frac{7,5}{12,75} = \frac{LN}{10,2}$

d'où (produit en croix) : LN = 7,5 × 10,2 ÷ 12,75 = 6 m.

La fermeture éclair mesure donc 6 m.