Fiche n°14

CONNAITRE ET UTILISER LES TRIANGLES SEMBLABLES

I. *Triangles semblables et angles : des triangles de même forme*

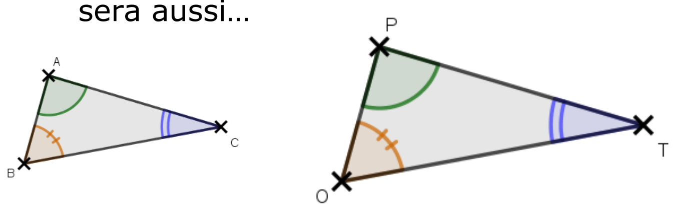
Définition On dit que deux triangles sont **semblables** (ou **de même forme**) lorsque tous leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Propriété **Pour justifier que deux triangles sont semblables…**

Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables (de même forme).

Démonstration En effet, comme la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égal à 180°, si deux angles sont égaux, alors le troisième le sera aussi…

Exemple



D'après le codage des angles, les triangles ABC et POT sont semblables, c'est à dire de la même forme… Attention, ils ne sont pas forcément de la même longueur !

EXERCICE TYPE 1

Montrer que les triangles BAC et MIL suivants sont semblables :

- Le triangle BAC est rectangle en B avec $\widehat{ACB} = 27°$ et BC = 4 cm.
- Le triangle MIL est tel que IL = 15 cm, $\widehat{MLI} = 63°$ et $\widehat{MIL} = 27°$.

Solution

L'idée est de chercher si deux angles du triangle BAC sont de même mesure que deux angles du triangle MIL…

Etape 1 *Calculons la mesure du troisième angle du triangle BAC.*

Données

D'après l'énoncé : $\widehat{ABC} = 90°$ (triangle rectangle en B) et $\widehat{ACB} = 27°$.

D'après la leçon, la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.

Propriété utilisée

Donc $\widehat{BAC} = 180 - 90 - 27 = 63°$. ***Conclusion***

Etape 2 *Montrons que les triangles BAC et MIL sont semblables.*

Données

On sait que $\widehat{MLI} = \widehat{BAC} = 63°$ et que $\widehat{MIL} = \widehat{ACB} = 27°$.

D'après la leçon, si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.

Propriété utilisée

Donc les triangles MIL et BAC sont semblables, c'est-à-dire de même forme.

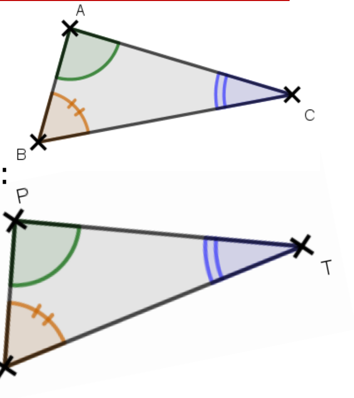
Conclusion

II. *A propos des longueurs des triangles semblables…*

Théorème (admis)

Si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

Autrement dit Il s'agit d'une situation d'agrandissement ou de réduction.



Si deux triangles ABC et POT sont semblables tel que :

$\widehat{A} = \widehat{P}$; $\widehat{B} = \widehat{O}$; $\widehat{C} = \widehat{T}$

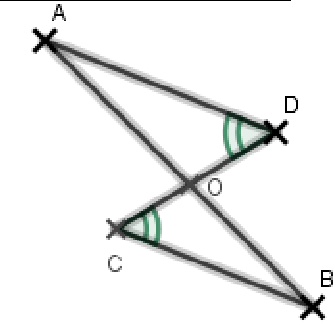
Alors le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

Longueurs de ABC	BC	AC	AB
Longueurs de POT	OT	PT	OP

$\times k$

Autrement dit : $\boxed{\frac{OT}{BC} = \frac{PT}{AC} = \frac{OP}{AB} = k}$

EXERCICE TYPE 2 On considère le croquis ci-contre (qui n'est pas en vraie grandeur).



On précise qu'en vraie grandeur, on a :
OD = 2,4 cm ; AO = 5 cm ; AD = 6 cm et BC = 5,1 cm.

1. Justifier que les triangles AOD et BOC sont semblables.

2. En déduire les longueurs du triangle BOC.

Solution

Données

1. D'après le codage des angles, les angles $\widehat{ADO}$ et $\widehat{OCB}$ ont la même mesure.
Comme les angles $\widehat{AOD}$ et $\widehat{BOC}$ sont **opposés par le sommet**, ils sont aussi égaux.

D'après la leçon, si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables. ***Propriété utilisée***

Donc les triangles AOD et BOC sont semblables. ***Conclusion***

2. D'après la question précédente, on sait que les AOD et BOC sont semblables.

Données

D'après la leçon, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.

Propriété utilisée

On a donc : *Triangle BOC* / *Triangle AOD* $\dashrightarrow$ $\frac{\mathbf{BO}}{\mathbf{AO}} = \frac{\mathbf{CO}}{\mathbf{DO}} = \frac{\mathbf{BC}}{\mathbf{AD}}$

Côtés opposés à C et D — *Côtés opposés à B et D* — *Côtés opposés à O*

Conclusion et calculs

On remplace par les longueurs connues : $\frac{BO}{5} = \frac{CO}{2,4} = \frac{5,1}{6}$.

On utilise les produits en croix :

$$\mathbf{BO} = \frac{5\times5,1}{6} = \mathbf{4,25\ cm} \quad ; \quad \mathbf{CO} = \frac{2,4\times5,1}{6} = \mathbf{2,04\ cm}$$

III. *Reconnaître des triangles semblables avec des longueurs proportionnelles*

Théorème réciproque *(admis)*

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles,
alors ces triangles sont semblables.

EXERCICE TYPE 3 On considère les deux triangles suivants :
- le triangle FER tel que FE = 5,1 cm, ER = 6 cm et FR = 7,2 cm.
- le triangle SOL tel que SL = 1,7 cm, SO = 2,4 cm et OL = 2 cm.

1. Justifier que les triangles FER et SOL sont semblables.
2. Quels sont les angles deux à deux égaux dans les triangles FER et SOL ?

Solution

1. Repérons d'abord les côtés homologues, c'est-à-dire les côtés opposés aux angles égaux dans les deux triangles :

	Petits côtés	*Moyens côtés*	*Grands côtés*
Triangle SOL	SL = 1,7	SO = 2,4	OL = 2
Triangle FER	FE = 5,1	FR = 7,2	ER = 6

Calculons les rapports de longueurs deux à deux associées dans les deux triangles :

Triangle SOL →
Triangle FER →

$$\frac{SL}{FE} = \frac{1,7}{5,1} = \mathbf{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \frac{SO}{FR} = \frac{2,4}{7,2} = \mathbf{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \frac{OL}{ER} = \frac{2}{6} = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

Données

Les plus petits côtés *Les deux grands côtés* *Les deux autres côtés*

Les coefficients sont tous égaux.

D'après la leçon, si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles, alors ces triangles sont semblables.

Propriété utilisée

Donc les triangles FER et SOL sont semblables.

Conclusion

2. Les angles deux à deux égaux dans les triangles FER et SOL sont ceux opposés aux côtés égaux, donc $\widehat{SOL} = \widehat{ERF}$; $\widehat{SLO} = \widehat{REF}$; $\widehat{OSL} = \widehat{EFR}$.