Fiche n°13

CONNAÎTRE ET UTILISER LES TRIANGLES EGAUX

I. Géométrie du triangle : mes propriétés vues en 5ème

Propriété **Inégalité triangulaire**

Dans tous les triangles, la somme des longueurs de deux côtés est supérieure à la longueur du troisième côté.

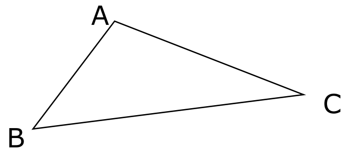
Autrement dit **Pour pouvoir construire un triangle…**

Si, dans un triangle, la somme des longueurs des deux plus petits côtés est strictement supérieure à la longueur du plus grand côté, **alors** on peut construire ce triangle (non aplati).

Propriété **Somme des angles d'un triangle**

Dans tous les triangles, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

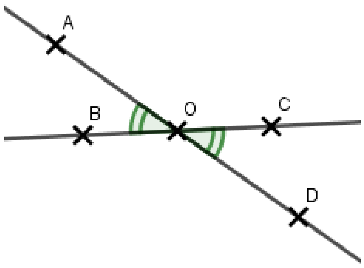
Exemple Dans le triangle ABC , on peut dire que :
¤ BC < BA + AC (Inégalité triangulaire)
¤ $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC} = 180°$



Propriété **Angles opposés par le sommet**

Si deux angles sont opposés par le sommet, **alors** ils ont la même mesure.

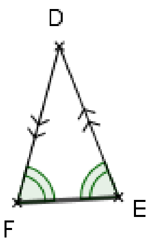
Exemple Dans la figure-clé ci-contre, les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet, donc $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.



Définition et propriété **Triangles isocèles**

Un triangle **isocèle** est un triangle qui a deux côtés de même longueur.

On appelle **sommet principal** le point commun aux deux côtés de même longueur (point D) et **base** le côté opposé au sommet principal (segment [EF])

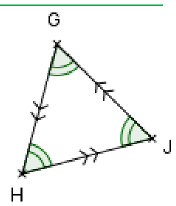


Si un triangle est isocèle, **alors** ses deux angles à la base ont la même mesure.

Réciproquement, **si** un triangle a deux angles de même mesure, **alors** il est isocèle.

Définition et propriété **Triangles équilatéraux**

Un triangle **équilatéral** est un triangle qui a ses trois côtés de même longueur.



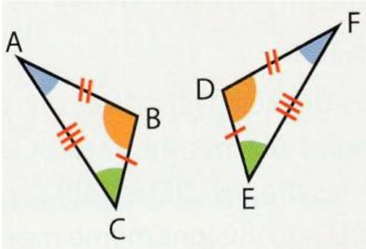
Si un triangle est équilatéral, **alors** ses trois angles mesurent 60°.

Réciproquement, **si** un triangle a deux angles qui mesure 60°, **alors** il est équilatéral.

Remarque Avant toute construction d'un triangle, on réalise une <u>figure à main levée où l'on place très précisément les points et les données</u>…
Attention, certaines constructions nécessitent parfois de trouver un angle ou une longueur manquante avant !

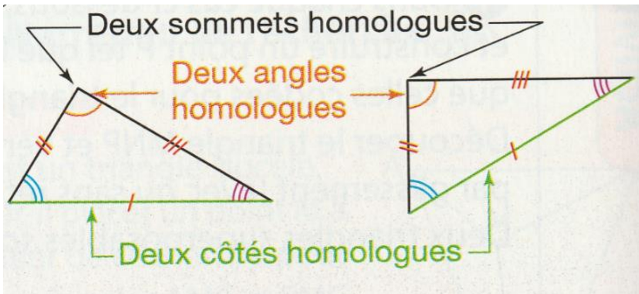
II. Triangles égaux

1. Définition et vocabulaire



Définition On dit que deux triangles sont **égaux** lorsqu'ils sont donc exactement **superposables**, c'est-à-dire qui ont des côtés deux à deux de même longueur et des angles deux à deux de même mesure.
On dit aussi parfois qu'ils sont **isométriques**.

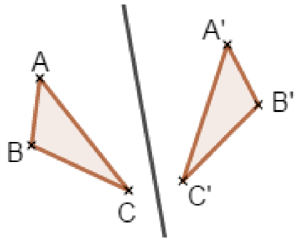
Vocabulaire Lorsque deux triangles sont égaux, deux angles superposables sont dits **angles homologues**, tout comme leurs sommets, et deux côtés superposables sont également dits **côtés homologues**.



EXERCICE TYPE 1

Dans chacun des cas ci-dessous, dire si les triangles sont égaux ou non ? Justifier.

Cas n°1



Les triangles ABC et A'B'C' sont symétriques par rapport à la droite d.

Cas n°2

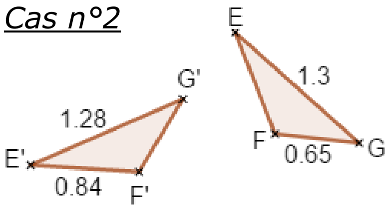
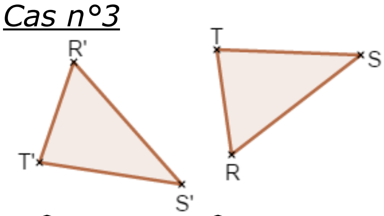


Figure obtenue à partir du logiciel Geogebra.

Cas n°3



$\widehat{RST} = 40°$, $\widehat{T'R'S'} = 59°$ et $\widehat{STR} = \widehat{S'T'R'} = 80°$

Solution

Cas n°1 D'après les propriétés de la symétrie axiale vues en 6ème, deux triangles symétriques par rapport à une droite sont superposables.

Les triangles ABC et A'B'C' sont donc bien égaux.

Cas n°2 Pour que les triangles soient égaux, il faudrait que les deux plus grands côtés aient la même longueur ce qui n'est pas le cas : 1,28 ≠ 1,3.

Les triangles EFG et E'F'G4 ne sont pas donc pas égaux.

Cas n°3 Dans le triangle RST, deux angles mesurent 40° et 80°.

D'après la leçon, comme le somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égale à 180°, le troisième angle $\widehat{TRS}$ de ce triangle mesure donc 180 – 80 – 40 = 60°. Comme $\widehat{T'R'S'}$ = 59°, les deux triangles ne sont pas exactement superposables…

Les triangles RST et R'S'T' ne sont donc pas égaux.

2. Utiliser les cas d'égalités d'angles

Propriétés (admises)

¤ Si deux triangles ont leurs côtés deux à deux de même longueur, alors ces deux triangles sont égaux. *(Figure 1)*

¤ Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur **compris** entre deux angles de même mesure, alors ces deux triangles sont égaux. *(Figure 2)*

¤ Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure **compris** entre deux côtés de même longueur, alors ces deux triangles sont égaux. *(Figure 3)*

Exemples Dans les trois exemples suivants, les deux triangles sont égaux.

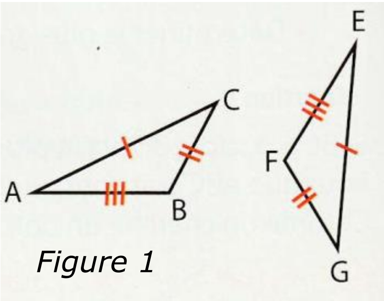


Figure 1

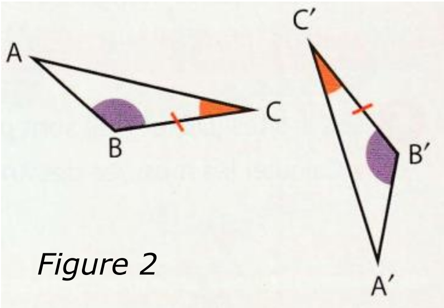


Figure 2

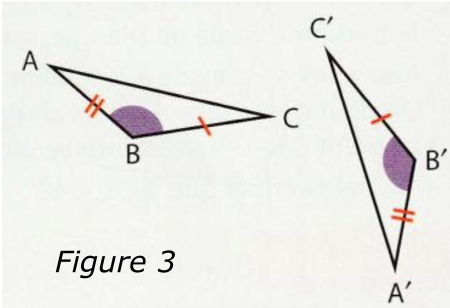
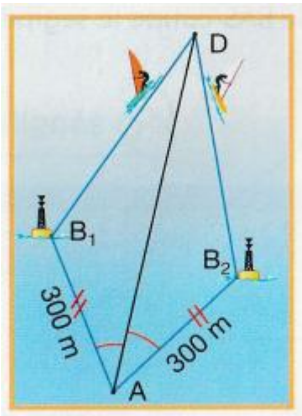


Figure 3

EXERCICE TYPE 2



Deux véliplanchistes s'affrontent sur le circuit ci-contre.
Ils partent de D et arrivent en A. L'un passe par la bouée B_1 et l'autre par la bouée B_2.

1. A partir des codages de la figure, montrer que les triangles AB_1D et AB_2D sont égaux.

2. Les deux véliplanchistes ont-ils parcouru la même distance ? Justifier.

Solution

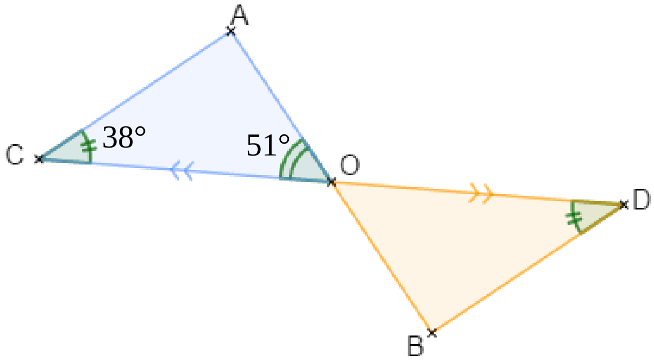
1. D'après le codage sur la figure, on a : $AB_1 = AB_2 = 300$ m.
Les angles $\widehat{B_1AD}$ et $\widehat{B_2AD}$ sont égaux.
Les triangles B_1AD et B_2AD ont en plus un autre côté en commun : le côté [AD].
D'après la leçon, si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure **compris** entre deux côtés de même longueur, alors ils sont égaux.

Donc les triangles AFH, HCG et GBF sont des triangles égaux.

2. D'après la question précédente, les triangles AFH, HCG et GBF sont des triangles égaux.
Donc FH = HG = GF.
Autrement dit, le triangle FGH est bien un triangle équilatéral.

EXERCICE TYPE 3

On considère la figure ci-contre où les droites (AB) et (CD) se coupent en O.



1. Démontrer que les triangles AOC et BOD sont égaux.

2. Le triangle OBD est-il rectangle en B ? Justifier votre réponse.

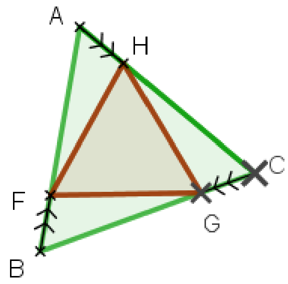
Solution

1. D'après le codage sur la figure, on a : CO = OD et $\widehat{ACO} = \widehat{BDO}$.
Comme les angles $\widehat{AOC}$ et $\widehat{BOD}$ sont opposés par le sommet, ils sont aussi de la même mesure.
D'après la leçon, si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur **compris** entre deux angles de même mesure, alors ils sont égaux.
Donc les triangles AOC et BOD sont des triangles égaux.

2. D'après la leçon, la somme des mesures des angles d'un triangle est toujours égale à 180°. Donc, dans le triangle AOC, on a : $\widehat{OAC} = 180 - 38 - 51 = 91°$.
Le triangle AOC n'est donc pas rectangle, et comme, d'après la question précédente, les triangles AOC et BOD sont égaux, le triangle BOD n'est pas rectangle non plus.

EXERCICE TYPE 4

Le triangle ABC ci-contre est un triangle équilatéral de côté 4 cm et avec AH = 1 cm. *La figure ci-contre n'est pas vraie grandeur.*



1. Montrer que les triangles AFH, HCG et GBF sont des triangles égaux.

2. En déduire que le triangle FGH est lui aussi équilatéral.

Solution

1. D'après le codage sur la figure, on a : AH = CG = BF = 1 cm.
D'après l'énoncé, le triangle ABC est un triangle équilatéral de côté 4 cm, on a donc aussi : HC = GB = FA = 3 cm.
Enfin, comme les trois angles d'un triangle équilatéral sont égaux à 60°, on a également $\widehat{FAH} = \widehat{HCG} = \widehat{GBF} = 60°$.

D'après la leçon, si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure **compris** entre deux côtés de même longueur, alors ils sont égaux.

Donc les triangles AFH, HCG et GBF sont des triangles égaux.

2. D'après la question précédente, les triangles AFH, HCG et GBF sont des triangles égaux.
Donc FH = HG = GF.
Autrement dit, le triangle FGH est bien un triangle équilatéral.