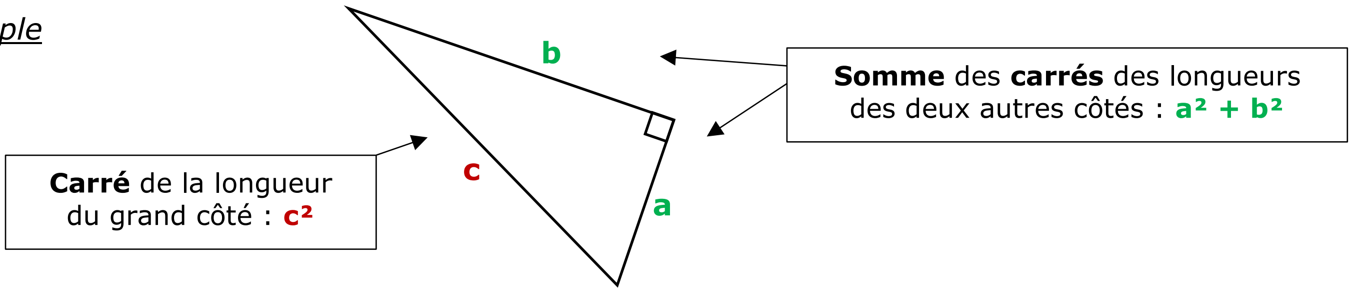
Fiche n°12
CONNAITRE ET UTILISER LE THEOREME DE PYTHAGORE

I. *L'égalité de Pythagore*

Propriété Un **triangle rectangle** est un triangle dont le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

Exemple

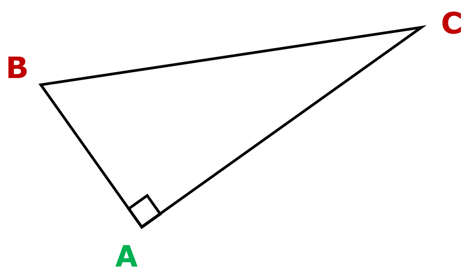


Dans cet exemple, l'égalité de Pythagore s'écrit donc : $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

Vocabulaire Dans un triangle rectangle, le plus grand côté est appelé **hypoténuse**. Il est opposé à l'angle droit (« opposé à » en géométrie signifie « en face de »).

Les deux autres côtés sont aussi appelés les **côtés adjacents à l'angle droit** (« adjacent à » en géométrie signifie « à côté de »).

Exemple



Le triangle ABC est **rectangle en A**.
Son hypoténuse est [**BC**].
L'égalité de Pythagore s'écrit donc :

$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$

Démonstration Cette égalité a été démontrée par de nombreux mathématiciens.
Voir l'activité effectuée en classe avec les cinq puzzles différents…
Des animations sont disponibles sur le fabuleux site de Thérèse Eveilleau.

Les carrés à connaître						
	1^2 = **1**	2^2 = **4**	3^2 = **9**	4^2 = **16**	5^2 = **25**	6^2= **36**
	7^2 = **49**	8^2 = **64**	9^2 = **81**	10^2 = **100**	11^2 = **121**	12^2 = **144**

Avec la calculatrice On utilise la touche $\boxed{x^2}$.

Par exemple : $5{,}3^2 = 28{,}09$.

II. Pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle

<u>*L'idée*</u> *Si un triangle est rectangle, alors on peut écrire l'égalité de Pythagore. Autrement dit, si on connaît deux longueurs, on peut utiliser cette égalité pour trouver la longueur manquante…*

Théorème de Pythagore

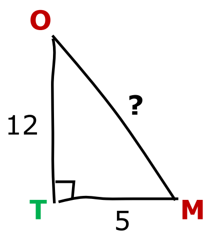
Si un triangle est un **triangle rectangle,**

alors le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (**égalité de Pythagore vérifiée**).

EXERCICE TYPE 1 **Calculer la longueur de l'hypoténuse**

Un triangle TOM est rectangle en T tel que MT = 5 cm et OT = 12 cm.
Calculer la longueur du troisième côté [OM].

<u>*Solution*</u>



*Je réalise une **figure à main levée** afin de bien visualiser l'hypoténuse.*

Données *: important à préciser car c'est faux si le triangle n'est pas rectangle !*

D'après l'énoncé, le triangle TOM est rectangle **en T**.

On peut donc appliquer le théorème de Pythagore :

Propriété utilisée *: pour expliquer d'où viennent les calculs qui suivent…*

$\mathbf{OM}^2 = \mathbf{T}M^2 + \mathbf{T}O^2$

Conclusion du théorème *: l'égalité de Pythagore…*

$OM^2 = 5^2 + 12^2$

$OM^2 = 169$

$\boxed{\mathbf{OM} = \sqrt{169} = \mathbf{13\ cm}}$

Calculs et conclusion (avec la touche $\boxed{\sqrt{\ }}$ de la calculatrice).

<u>*Définition*</u> Soit ***a*** un nombre positif.
On appelle **racine carrée de *a*** le nombre positif dont le carré est égal à ***a***.
On la note $\sqrt{a}$.

<u>*Racines carrées à connaître*</u>

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$

<u>*Avec la calculatrice*</u> On utilise la touche $\boxed{\sqrt{x}}$.

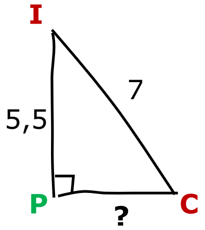
Par exemple : $\sqrt{361} = 19$ (valeur exacte) car $19^2 = 361$.
$\sqrt{29} \approx 5{,}4$ (valeur arrondie au dixième)

EXERCICE TYPE 2 **Calculer la longueur de l'un des côtés adjacents**

Un triangle PIC est rectangle en P tel que PI = 5,5 cm et IC = 7 cm.

Calculer la longueur du troisième côté [PC]. *On donnera une valeur approchée au dixième de centimètre près.*

<u>Solution</u>



*Je réalise une **figure à main levée** afin de bien visualiser l'hypoténuse.*

Données *en indiquant bien que l'angle droit est en P ici.*

On sait que le triangle PIC est rectangle **en P**.

Propriété utilisée *pour justifier l'égalité que vous allez écrire…*

D'après le théorème de Pythagore, on a :

$\mathbf{IC}^2 = \mathbf{P}C^2 + \mathbf{PI}^2$

Conclusion du théorème : *l'égalité de Pythagore…*

$7^2 = PC^2 + 5,5^2$

$49 = PC^2 + 30,25$

Calculs à détailler.

$PC^2 = 49 - 30,25$

$PC^2 = 18,75$

$\boxed{\begin{array}{l}\mathbf{PC} = \sqrt{18,75}\ \mathbf{cm} \\ \mathbf{PC} \approx \mathbf{4,3\ cm}\end{array}}$

Conclusion : d'abord une **valeur exacte**, puis une **valeur approchée** (voir consignes de l'énoncé).

III. *Pour justifier qu'un triangle est rectangle*

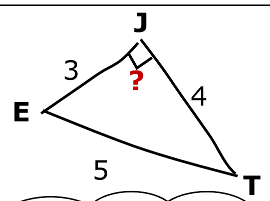
<u>Réciproque du théorème de Pythagore</u>

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés (**égalité de Pythagore vérifiée**),

alors ce triangle est un **triangle rectangle**.

EXERCICE TYPE 3 **Démontrer qu'un triangle est rectangle**

Justifier que le triangle JET dont on donne ci-contre une figure à main levée est rectangle en J.



<u>Solution</u>

- Je calcule le carré de la plus grande longueur :

$ET^2 = 5^2 = \mathbf{25}$

Données : *on effectue les calculs séparément pour voir **s'il y a égalité ou non**…*

- Je calcule la somme des carrés des deux autres côtés :

$EJ^2 + JT^2 = 3^2 + 4^2 = \mathbf{25}$

L'égalité de Pythagore est bien vérifiée : $ET^2 = EJ^2 + JT^2$

On peut donc appliquer **la réciproque du théorème de Pythagore.**

Propriété utilisée

On peut conclure que **le triangle JET est rectangle en J**.

Conclusion

<u>A savoir</u> **Le triangle de dimensions (3 ; 4 ; 5) est un triangle rectangle.**

Et les triangles de dimensions proportionnelles à celui-ci sont aussi des triangles rectangles : par exemple, les triangles de dimensions (6 ; 8 ; 10), (9 ; 12 ; 15)…

IV. *Pour justifier qu'un triangle n'est pas rectangle*

<u>L'idée</u> *Si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, le triangle ne peut pas être rectangle !*

En effet, d'après le théorème de Pythagore, *si le triangle était rectangle, alors on pourrait écrire l'égalité de Pythagore… Donc le triangle ne peut pas être rectangle si on n'a pas l'égalité de Pythagore.*

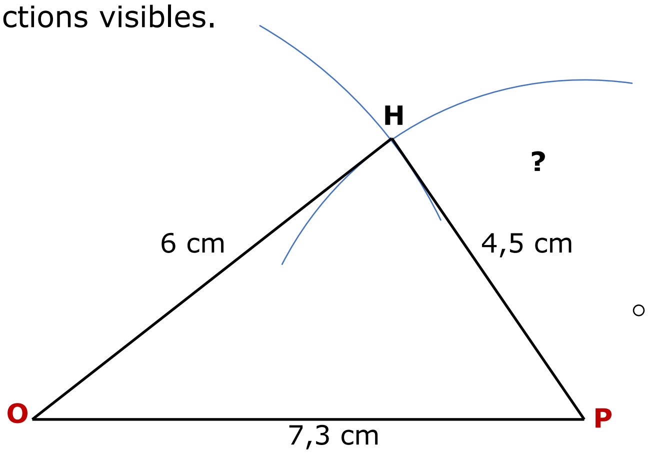
EXERCICE TYPE 4 **Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle**

1. Construire un triangle HOP tel que : HP = 4,5 cm ; OP = 7,3 cm et OH = 6 cm.

2. Ce triangle est-il un triangle rectangle.

<u>Solution</u>

1. La figure doit être construite précisément, avec le compas, en laissant les traits de constructions visibles.



*Construire **précisément** la figure, avec le compas, **en laissant les traits de constructions visibles**.*

ATTENTION !** A vue d'œil, le triangle paraît rectangle… Mais **seuls les calculs vont permettre d'en être sûr !

2. - Je calcule le carré de la plus grande longueur :

$OP^2 = 7{,}3^2 =$ **53,29**

- Je calcule la somme des carrés des deux autres côtés :

$OH^2 + HP^2 = 6^2 + 4{,}5^2 =$ **56,25**

***Données** : on effectue les calculs séparément pour voir **s'il y a égalité ou non**…*

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée.

Propriété utilisée

D'après le **théorème de Pythagore,**
le triangle **HOP ne peut pas être rectangle.**

***Conclusion** : car, d'après le théorème de Pythagore, si le triangle était rectangle, alors il y aurait égalité…*

V. *Théorème ou réciproque : un bilan pour mieux comprendre…*

On a donc vu les deux énoncés suivants :

Théorème de Pythagore

Si un triangle est un **triangle rectangle**,

alors l'égalité de Pythagore est vérifiée (autrement dit, alors le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés).

Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, **l'égalité de Pythagore est vérifiée** (autrement dit, si le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés,

alors ce triangle est un **triangle rectangle**.