Fiche n°9

COMPRENDRE ET UTILISER LES NOTIONS DE PROBABILITES

La notion de **probabilité** est une théorie qui propose des modèles **pour prévoir** le résultat d'expérience dans lequel intervient le **hasard**…

Les probabilités sont utilisées dans de nombreuses situations sociales, économiques, ludiques, industriels… souvent en lien avec les statistiques : voir l'introduction « De l'importance des statistiques et des probabilités » du chapitre n°5 « Outils statistiques ».

I. *Modéliser une expérience aléatoire : premières notions de probabilité*

Définition Une **expérience aléatoire** est une expérience dans laquelle intervient le hasard. On ne peut pas prévoir le résultat réel à l'avance mais on peut lister les différents résultats possibles que l'on appelle **issues**.
Plusieurs issues regroupées ensemble constituent un **évènement**.
La **probabilité** d'un évènement est en fait « proportion de chances » que celui-ci se réalise…

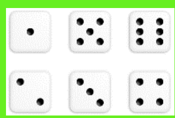
Exemple

Expérience aléatoire

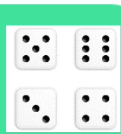
On lance un dé et on observe la face du dessus.

Issues

Les résultats possibles sont 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.



Evènement



"Obtenir un nombre strictement plus grand que 2".

Probabilité

Cet évènement a 4 chances sur 6 de se réaliser.

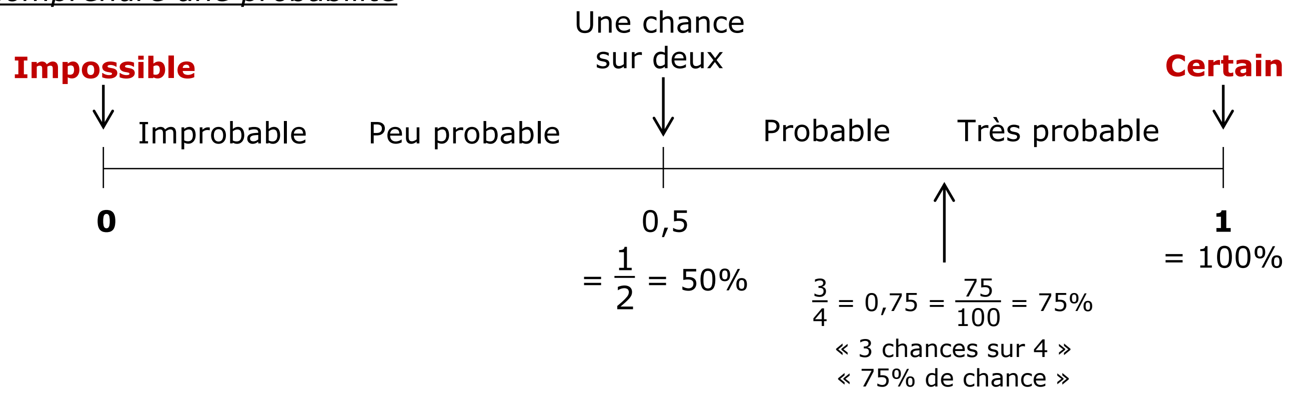
Sa probabilité est $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

Propriétés

¤ Une probabilité est un **nombre compris entre 0 et 1**.

¤ La somme des probabilités de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est toujours égale à 1 (car 100% = 1).

Comprendre une probabilité



Remarque

Comme une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, elle peut s'exprimer avec différentes écritures :

¤ sous forme d'**une fraction** ;
¤ sous forme d'une écriture décimale ;
¤ ou encore sous forme d'un pourcentage.

Le plus souvent, on utilise l'écriture sous forme d'une fraction qui correspond toujours à une valeur exacte, alors que l'écriture décimale ou en pourcentage est parfois une valeur approchée…

EXERCICE TYPE 1 **Tirer une boule au hasard dans un sac**

Un sac contient 20 boules identiques numérotées de 1 à 20.
On tire une boule au hasard et on regarde son numéro.

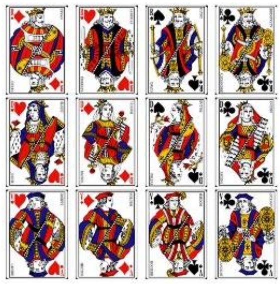
Quelle est la probabilité d'obtenir un multiple de 6 ?

Solution Dans ce sac, il y a 20 boules possibles.

3 de ces boules ont un numéro multiple de 6 : les boules 6, 12 et 18.

La probabilité d'obtenir un multiple de 6 est donc $\frac{3}{20} = 0{,}15 = 15\%$

EXERCICE TYPE 2 **Avec un jeu de cartes…**



Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité, en pourcentage, de tirer au hasard une figure (V, D ou R) ?

Solution

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs (carreau, cœur, pique et trêfle) et donc 12 figures (V, D ou R).

La probabilité de tirer au hasard une figure dans un jeu de 32 cartes est donc égale à:

$$\frac{12}{32} = \frac{3\times4}{8\times4} = \frac{3}{8}$$

Transformons cette fraction en pourcentages : $\frac{3}{8} = \frac{\textbf{?}}{\mathbf{100}}$

Rappel : $P\,\% = \frac{P}{100}$

Avec le produit en croix, on obtient : $3 \times 100 \div 8 = 12{,}5$

Il y a 3 chances sur 8 soit encore 12,5 % de chance de tirer une figure dans un jeu de 32 cartes.

Remarque Lorsque, dans une expérience aléatoire, toutes les issues ont la même probabilité, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Dans une situation d'équiprobabilité (comme dans les exercices types ci-dessus), la probabilité d'un évènement est égale à la proportion :

$$\frac{\textbf{Nombre de cas favorables à l'évènement}}{\textbf{Nombre de cas possibles}}$$

II. Simuler une expérience aléatoire

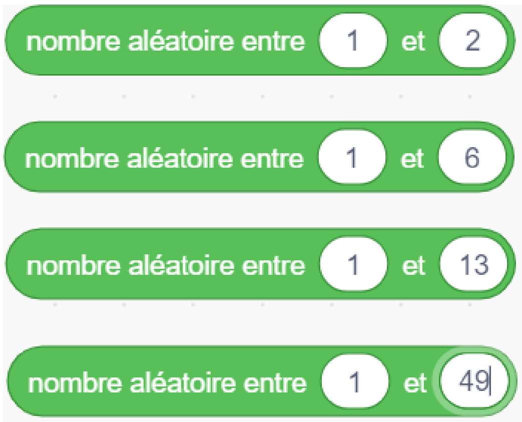
1. Avec Scratch…

Avec le logiciel Scratch, on peut simuler une expérience aléatoire grâce à la commande

(disponible dans le menu « Opérateurs »)

EXERCICE TYPE 3 **Un lancer de dé cubique…**

Relier chacune des commandes Scratch ci-dessous à la (ou les) expérience(s) aléatoire(s) qui peut (peuvent) lui correspondre.



A : On lance au hasard une pièce de monnaie et on observe la face du dessus : Pile ou Face ?

B : On regarde la première boule sortie lors du tirage national du Loto en France.

C : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant autant de boules blanches que de boules noires.

D : On lance un dé non truqué et on observe le numéro de la face du dessus.

E : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant 6 boules blanches et 7 boules noires.

<u>*Solution*</u>

A : On lance au hasard une pièce de monnaie et on observe la face du dessus : Pile ou Face ?

B : On regarde la première boule sortie lors du tirage national du Loto en France.

C : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant autant de boules blanches que de boules noires.

D : On lance un dé non truqué et on observe le numéro de la face du dessus.

E : On tire au hasard une boule, dans un sac opaque contenant 6 boules blanches et 7 boules noires.

En effet :

L'expérience aléatoire A revient à simuler l'expérience en donnant à 1 la valeur « Pile » et à 2 la valeur « Face ».

Pour l'expérience aléatoire B, il faut savoir que le tirage national du Loto contient 49 boules…

Dans l'expérience aléatoire C, comme il y a autant de boules blanches que de boules noires, on peut simuler cette expérience en donnant à 1 la valeur « Blanche » et à 2 la valeur « Noire ».

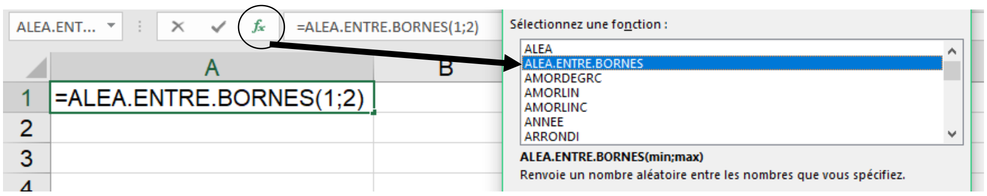
L'expérience aléatoire D revient à simuler l'expérience de 1 à 6 comme les 6 faces d'un dé.

Et enfin, dans l'expérience aléatoire E, il y a 13 boules au total. Il suffit donc de dire, par exemple, que toutes les nombres de 1 à 6 correspondent à une boule jaune, et que les autres de 7 à 13 correspondent à une boule rouge.

2. Avec un tableur…

EXERCICE TYPE 4 **Un lancer de pièce : pile ou face !**

Etienne a simulé plusieurs fois des lancers d'une pièce en utilisant la fonction **ALEA.ENTRE.BORNES** d'un tableur.



Pour chaque simulation, il a compté le nombre de « Pile » obtenus :

	Nombre de « Pile »	*Fréquence de « Pile »*
Simulation n°1 : 10 lancers	3	0,3 = 30%
Simulation n°2 : 100 lancers	58	0,58 = 58%
Simulation n°3 : 1 000 lancers	534	0,534 = 53,4%
Simulation n°4 : 10 000 lancers	4 964	0,4964 = 49,64%

Est-il normal qu'il n'ait pas obtenu exactement la moitié de « Pile » à chaque simulation ?

Solution

En théorie, on a une chance sur deux d'obtenir « Pile » : autrement dit, la probabilité d'obtenir « Pile » est $\frac{1}{2} = 0,5$.

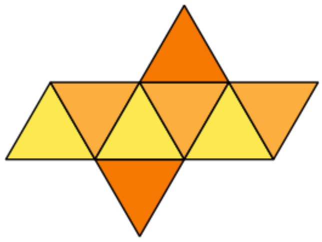
Mais quand on réalise vraiment l'expérience, c'est le hasard… et les résultats peuvent varier d'une expérience à une autre ! **Les fréquences réelles varient à chaque simulation** et il est donc normal de ne pas obtenir exactement la moitié de « Pile ».

On peut remarquer cependant que **plus l'on effectue de lancers, plus les fréquences réelles se rapprochent de la probabilité théorique**.

Propriété **Si on répète un très grand nombre de fois une expérience aléatoire**, la fréquence d'apparition d'une issue devient de plus en plus proche de la probabilité de cette issue.

III. *Mes premières propriétés en probabilités…*

EXERCICE TYPE 5 **Un étrange dé octaédrique…**



On construit un dé <u>à 8 faces</u> à l'aide d'un patron avec huit triangles équilatéraux comme ci-contre…
On numérote chaque face de 1 à 8 et on lance ce dé.

Déterminer la probabilité des trois évènements suivants :

a. A : « Le résultat est égal à 3 »
b. b : « Le résultat est inférieur ou égal à 2 »
c. C : « Le résultat est strictement supérieur à 3 ».
d. D : « Le résultat n'est pas égal à 3 ».

<u>Solution</u>

a. L'évènement A correspond à la face « 3 ».
On a donc **P(A)** $= \mathbf{\frac{1}{8}} = 0{,}125$.

b. L'évènement B correspond aux faces « 1 ou 2 ».
On a donc **P(B)** $= \frac{2}{8} = \mathbf{\frac{1}{4}} = 0{,}25$.

c. L'évènement C correspond aux 5 faces entre 4 et 8.
On a donc **P(C)** $= \mathbf{\frac{5}{8}} = 0{,}675$.

d. Remarquons que l'évènement D correspond en fait à toutes les issues sauf « 3 », c'est-à-dire que c'est exactement le contraire de A…

Mais, d'après le paragraphe I, la somme des probabilités de toutes les issues possibles d'une expérience aléatoire est toujours égale à 1, donc :

$$\mathbf{P(D)} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{7}{8}}.$$

<u>A savoir</u> On note $\overline{\mathbf{A}}$ l'évènement **contraire** de A, c'est à dire celui qui se réalise dès que C ne se réalise pas.
On peut alors écrire : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, ou encore : $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

<u>Exemple</u> Dans l'exercice-type ci-dessus :

D est l'évènement « Obtenir 1, 2, 4, 5, 6, 7 ou 8 ».
$\overline{D}$ est l'évènement « Obtenir 3 ».

Comme $P(\overline{D}) = \frac{1}{8}$ alors $P(D) = \frac{7}{8}$.