Fiche n°7

MOBILISER LA PROPORTIONNALITE : PROPORTIONS, POURCENTAGES, RATIOS ET ECHELLES

I. Proportions et situations de proportionnalité

Définition

Deux ***grandeurs*** sont ***proportionnelles*** si les valeurs de l'une s'obtiennent en ***multipliant*** (ou en ***divisant***) les valeurs de l'autre ***par un même nombre***.

EXERCICE TYPE 1 **Déterminer si un tableau est un tableau de proportionnalité ?**

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

Tableau 1

3	7	10
4,8	11,2	16

Tableau 2

5	4	11
10,5	8,12	23,1

Solution

On calcule pour chaque colonne le coefficient pour vérifier si c'est toujours le même…

Tableau 1 : $\frac{4,8}{3} = \mathbf{\frac{8}{5} = 1,6}$; $\frac{11,2}{7} = \mathbf{\frac{8}{5} = 1,6}$; $\frac{16}{10} = \mathbf{\frac{8}{5} = 1,6}$.

Tous les coefficients sont égaux, donc ce tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité $\frac{8}{5} = 1,6$.

Tableau 2 : $\frac{10,5}{5} = \mathbf{2,1}$; $\frac{8,12}{4} = \mathbf{2,03}$.

Deux des coefficients ne sont pas égaux, donc ce tableau ne peut pas être un tableau de proportionnalité.

EXERCICE TYPE 2 **Compléter un tableau de proportionnalité**

Le prix payé pour un achat en carburant est **proportionnel** au nombre de litres mis dans le réservoir.

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5
Grandeur 1	Volume de carburant (en L)	5	15	3	**C**=8	36,8
Grandeur 2	Prix (en €)	7	**A**=21	**B**=4,2	11,2	**D**=

Coefficient de proportionnalité

$\times\frac{7}{5}=1,4$ $\times\frac{5}{7}$

5 × ? = 7

A l'aide du tableau de proportionnalité ci-dessous, calculer le plus simplement possible les nombres A, B, C et D.

Avant de calculer, je cherche la méthode la plus simple !

Solution ***Plusieurs démarches possibles…***

Colonne 1 > *En multipliant une « colonne » par un nombre non nul.*
Comme 5×3 = 15, on a donc : **A** = 7×3 = **21**.

Colonne 2 > *En multipliant par le **coefficient de proportionnalité**.*
$\mathbf{B} = 3\times\frac{7}{5} = \mathbf{4,2}$

Colonne 3 > *En additionnant ou soustrayant deux « colonnes »* (ici, colonnes 1 et 3)
Comme 7 + 4,2 = 11,2 on a aussi : **C** = 5 + 3 = **8**.

Colonne 4 > En utilisant le « produit en croix » (ici, colonnes 1 et 3)
Comme 11,2×36,8 = 8×**D**, on a donc : $\mathbf{D} = \frac{11,2\times36,8}{8} = \mathbf{51,52}$

II. Des partages inégaux : notion de ratio

EXERCICE TYPE 3

1. On partage une poche de 42 bonbons entre Louise et Emile dans le **ratio 3:4**, c'est à dire de telle manière que lorsque Louise reçoit 3 bonbons, son ainé Emile en reçoit 4…
Combien Louise et Emile auront-ils de bonbons ?

2. 240€ sont partagés entre Mona et Solène dans le **ratio 2:3**.
Combien chacune d'elles reçoit-elle ?

Solution

1. Pour partager dans le ratio 3:4, il faut partager les 42 bonbons en 3 + 4 = 7 parts contenant $\frac{42}{7} = 6$ bonbons.

Louise aura donc 6×3 = **18 bonbons** et Emile aura 6×4 = **24 bonbons**.

Vérification : $\frac{18}{24} = \frac{3\times6}{4\times6} = \frac{3}{4}$

2. Dire que l'on partage 240 € entre Mona et Solène dans le **ratio 2:3** revient à dire que les 240€ sont partagés en 5 parties égales et que Mona en reçoit 2 parts et Ninon en reçoit 3 parts.

Comme $\frac{240}{5} = 48$, on peut conclure que :
- Mona reçoit 2×48 = **96 €**
- Ninon reçoit 3×48 = **144 €**.

Vérification : $\frac{96}{144} = \frac{2\times48}{3\times48} = \frac{2}{3}$

Remarque : Dire que « l'on partage 240 € dans le ratio 2:3 » revient à dire que :
« Si je partage la somme d'argent de Mona en 2 parts égales, cela est égal à la somme d'argent de Ninon partagée en 3 parts égales ».

Définition On dit que deux nombres **a** et **b** sont de **ratios 2:3** si $\mathbf{\frac{a}{2} = \frac{b}{3}}$

EXERCICE TYPE 4 **Avec un ratio entre trois quantités…**

Pour Noël, Céline et Djilali souhaitent partager 140 € entre leurs trois enfants Baptiste (l'ainé), Julie et Emile (le plus jeune) selon le ratio 5:3:2.

Combien chaque enfant recevra-t-il ?

Solution

Dire que l'on partage 140 € dans le ratio 5:3:2 revient à dire que les 140 € sont partagés en 5+3+2 = 10 parts égales et que Baptiste en reçoit 5 parts, Julie en reçoit 3 parts et Emile 2 parts.

Comme $\frac{140}{10} = 14$ €, on peut conclure que :
- Baptiste reçoit 14×5 = 70 €
- Julie reçoit 14×3 = 42 €.
- et Emile reçoit 14×2 = 28 €.

Vérification : $\frac{70}{5} = 14$; $\frac{42}{3} = 14$; $\frac{28}{2} = 14$.

III. *Situations avec des pourcentages*

EXERCICE TYPE 5 **Comparer avec des pourcentages**

D'après une étude publiée en 1995 :
« En 1968, sur une population totale de 49,7 millions de français, environ 1,9 millions de personnes étaient atteints d'allergie respiratoire. »

De nos jours, ils représentaient environ 30 % de la population en France.

Déterminer le pourcentage de la population atteinte d'allergie respiratoire en 1968 afin de constater l'augmentation inquiétante de cette allergie…

Solution

Les pourcentages correspondent à des égalités de proportions : $\frac{1,9}{49,7} = \frac{\mathbf{P}}{\mathbf{100}} = \mathbf{P\ \%}$

Il s'agit d'une situation de proportionnalité où les produits en croix sont donc égaux.
On a donc : $P = 1,9 \times 100 \div 49,7 \approx 3,8$

D'après cette étude, le pourcentage de la population atteinte d'allergie respiratoire est donc d'environ 3,8 % en 1968 contre 30 % en 1995…

EXERCICE TYPE 6 **Avec un jeu de cartes…**

Dans un jeu de 32 cartes :

1. Quel est le pourcentage de chance de tirer au hasard un as ?

2. Est-il vrai que plus 37,5 % des cartes sont des figures (V, D ou R) ?

Solution

1. Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 as, soit 4 chances sur 32 d'en tirer un au hasard.
$\frac{4}{32} = \frac{1}{8} = \frac{\mathbf{?}}{100}$ d'où : $\frac{1 \times 100}{8} = 12,5$.
Il y a **12,5 %** de chance de tirer au hasard un as dans un jeu de 32 cartes.

2. Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs soit 12 figures (V, D ou R).
La proportion de figures dans un jeu de 32 cartes est donc : $\frac{12}{32} = \frac{3\times4}{8\times4} = \frac{3}{8} = \frac{\mathbf{?}}{100}$
$\frac{3 \times 100}{8} = 37,5$. Il est donc vrai que la proportion de figures est de **37,5 %**.

EXERCICE TYPE 7 **Comparer des proportions…**

Dans une tablette de chocolat de 205 g, un gourmand préfèrera-t-il manger 140 g de cette tablette ou plutôt 70 % de cette tablette ?

Solution

¤ *1ère méthode : en comparant les proportions*

Si on mange 176 g, la proportion de chocolat mangé est : $\frac{140}{205} \approx 0,683 = 68,3\ \%$

Le gourmand préfèrera donc manger 70 % de la tablette…

¤ *2ème méthode : en comparant les quantités de chocolat mangé*

Si on mange 70 % de cette tablette, alors on mange $205 \times \frac{70}{100} = 143,5$ g.

Le gourmand préfèrera donc manger 70 % de la tablette…

EXERCICE TYPE 8 **Actions en bourse…**

Une action en course est au prix de 75 € au 1er janvier 2018.
Au 1er janvier 2019, elle a augmenté de 4 %.
Puis, au 1er janvier 2020, son prix a finalement baissé de 5 % par rapport à l'année précédente.

1. Montrer que le prix de cette action est de 78 € au 1er janvier 2019, puis de 74,10 € au 1er janvier 2020.

2. La baisse observée entre 2018 et 2020 est-elle de 1 % ?

Solution

1. L'augmentation entre 2018 et 2019 est de : $75\times\frac{4}{100} = 3$ €.

Le prix de cette action au 1er janvier 2019 est donc bien de 75 + 3 = 78 €.

La baisse de 5 % entre 2019 et 2020 correspond à une baisse de : $78\times\frac{5}{100} = 3{,}90$ €.

Le prix de cette action au 1er janvier 2020 est donc bien de 78 – 3,90 = 74,10 €.

2. Entre 2018 et 2020, si la baisse avait été de 1 %, alors le prix aurait baissé de :

$75\times\frac{1}{100} = 0{,}75$ €.

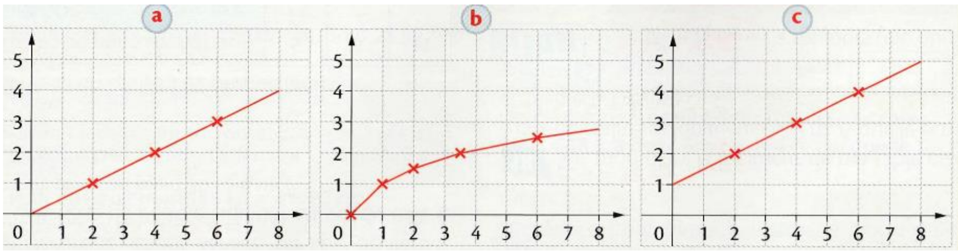
Or, d'après la question **1.**, la baisse entre 2018 et 2020 est de : 75 – 74,10 = 0,90 €.
La baisse observée entre 2018 et 2020 n'est donc pas de 1 % !

IV. *Observer la proportionnalité sur un graphique…*

Propriété

Graphiquement, une situation de proportionnalité est représentée par des points alignés sur **une droite qui passe par l'origine du repère**.

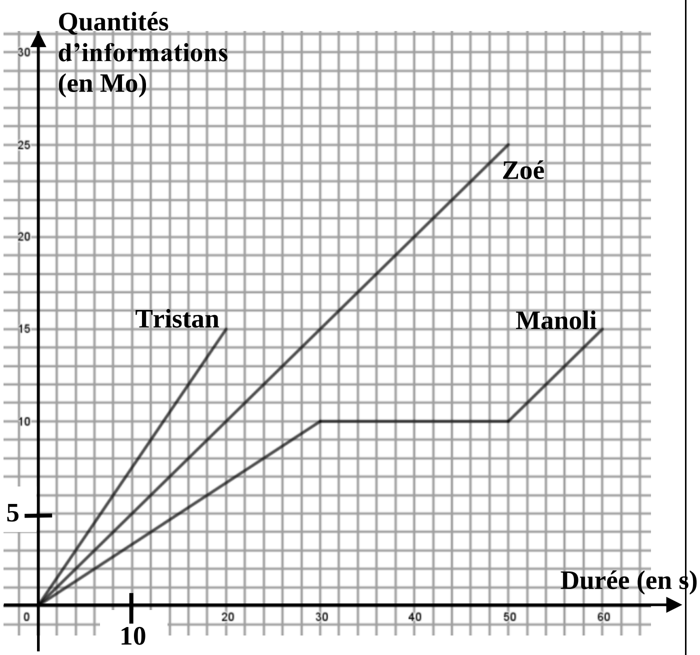
Exemple



Parmi ces trois graphiques, seul le graphique **a.** représente une situation de proportionnalité, avec trois points alignés sur une droite qui passe par l'origine.
Par ailleurs : - sur le graphique **b.**, les quatre points ne sont pas alignés ;
- sur le graphique **c.**, la droite ne passe pas par l'origine.

EXERCICE TYPE 9 Etude graphique de vitesses de téléchargement

Le graphique ci-contre représente la quantité d'informations téléchargées (en Mo) selon la durée (en s) du téléchargement de 3 vidéos sur les ordinateurs de Manoli, Tristan et Zoé.



1. a. Qui a téléchargé le plus d'informations ?
b. Quel téléchargement a duré le plus longtemps ?

2. Donner un exemple d'explication réelle possible permettant de justifier l'allure du téléchargement sur l'ordinateur de Manoli entre 30s et 50 s.

3. Parmi ces trois téléchargements, lesquels correspondent à des situations de proportionnalité ?

4. D'après vous, le téléchargement le plus Rapide (en Mo/min) a été celui de Tristan ou de Zoé ?

Solution

Important : lors d'une lecture graphique, il faut laisser visibles les tracés …

1. Zoé a téléchargé le plus d'information (25 Mo au lieu de 15 Mo pour Tristan et Manoli).

2. Le téléchargement de Manoli a duré le plus longtemps (1 min au lieu de 20 s et 50 s…)

3. Le téléchargement pour Manoli s'est arrêté 20 secondes (entre 30s et 50s du téléchargement). Peut-être y-a-t-il eu une coupure dans la connexion Internet…

4. Les téléchargements pour Tristan et Zoé correspondent à des situations de proportionnalité car ils sont représentés par deux droites passant par l'origine.

5. Pour comparer la vitesse moyenne de téléchargement, voici plusieurs méthodes :

¤ Par le graphique : les téléchargements de Tristan et Zoé sont réguliers et qu'au bout de 20s, c'est Tristan qui a téléchargé le plus de données (15 Mo contre 10 Mo).

¤ Par proportionnalité (en comparant pour 1 min = 60s) :

Pour Tristan :

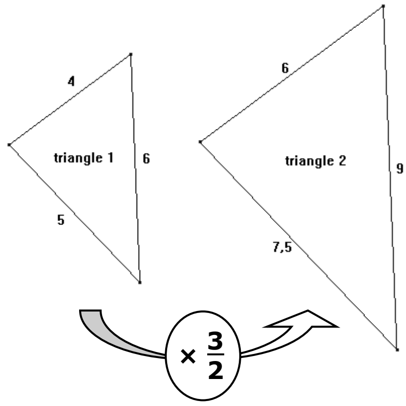
20 s	60 s
15 Mo	45 Mo

Pour Zoé :

20 s	60 s
15 Mo	45 Mo

Le téléchargement est plus rapide pour Tristan (45 Mo/min) que pour Zoé (30 Mo/min).

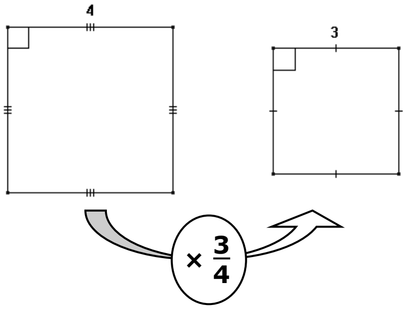
V. *Agrandissement et réduction : une situation de proportionnalité*



Exemple 1 $\frac{6}{4} = \mathbf{\frac{3}{2}}$; $\frac{7{,}5}{5} = \mathbf{\frac{3}{2}}$; $\frac{9}{6} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

Les rapports de longueurs sont égaux, donc
les longueurs de deux triangles sont proportionnelles.

On dit que le *triangle 2* est un **agrandissement** de rapport $\mathbf{\frac{3}{2}}$ du *triangle 1*.



Exemple 2 Les longueurs du *carré 3* s'obtiennent en multipliant les longueurs du *carré 4* par $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

On dit que le *carré 3* est une **réduction** du *carré 4* à l'échelle $\mathbf{\frac{3}{4}}$.

Rappel de 5ème Le rapport **k** d'agrandissement ou de réduction est aussi appelé **échelle**.

$$\mathbf{k} = \frac{\textbf{longueur obtenue après l'agrandissement ou la réduction}}{\textbf{longueur sur la figure initiale}}$$

A savoir Si **k > 1**, il s'agit d'un **agrandissement** (exemple 1 ci-dessus) ;

Si **k < 1**, il s'agit d'une **réduction** (exemple 2 ci-dessus).