Fiche n°6

MODELISER UNE SITUATION A L'AIDE D'UNE EQUATION

I. *Modélisation une situation à l'aide d'une équation*

Méthode Pour modéliser une situation où l'on chercher un nombre inconnu, on peut **mettre en équation** le problème :

- ***Choix de l'inconnue*** : on déterminer l'inconnue, ce que l'on cherche.
- ***Traduction de l'énoncé*** : on transforme les données de l'énoncé en une équation.
- ***Résolution de l'équation*** : on trouve les solutions de l'équation.
- ***Vérification*** : on teste les solutions dans le problème pour vérifier…
- ***Conclusion*** : on interprète la solution pour répondre au problème.

EXERCICE TYPE 1

On considère le programme de calcul présenté ci-contre sur Scratch.

x
$3x$
$3x-8$

Quel est le nombre donné initialement par l'utilisateur si, à la fin du programme, le lutin affiche « −65 » ?

Solution

- ***Choix de l'inconnue*** :
  Notons x le nombre donné initialement par l'utilisateur.
- ***Traduction de l'énoncé*** :
  Le problème proposé revient à trouver le nombre x tel que : $3x - 8 = -65$
- ***Résolution de l'équation*** :

$$3x - 8 = -65$$
$$3x - 8 + 8 = -65 + 8$$
$$3x = -57$$
$$3x \div 3 = -57 \div 3$$
$$x = \mathbf{-19}$$

Astuce :
On reprend le programme…
mais à l'envers !

- ***Vérification*** : $3\times(-19) - 8 = -57 - 8 = -65$
- ***Conclusion*** : Pour que le lutin affiche « −65 », le nombre donné initialement par l'utilisateur est −19.

II. *Qu'est-ce qu'une « équation » en mathématiques ?*

Vocabulaire Une **équation** est une égalité dans laquelle intervient un nombre de valeur ***inconnue*** désigné par une lettre.

Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres (voir séquence « expressions littérales ») : une valeur de l'inconnue pour laquelle **l'égalité est vraie** est appelée **solution** de l'équation.

EXERCICE TYPE 2 ***Etre solution d'une équation ?***

Le nombre (–1) est-il solution de l'équation : $x^2 = -5x - 6$?

Et le nombre (–2) ?

Solution

- Pour savoir si (–1) est solution de l'équation, on teste l'égalité pour x **= –1**.

  Pour x **= –1**, on a : $x^2 = (-1)^2 = \mathbf{+\,1}$

  $-5x - 6 = -5\times(-1) - 6 = 5 - 6 = \mathbf{-\,1}$

  Comme $+1 \neq -1$, (–1) n'est donc pas une solution de l'équation $x^2 = -5x - 6$.

- De même, pour x **= –2**, on a : $x^2 = (-2)^2 = \mathbf{4}$

  $-5x - 6 = -5\times(-2) - 6 = 10 - 6 = \mathbf{4}$

  Comme le résultat obtenu (4) est égal dans les deux membres de l'égalité, (–2) est une solution de l'équation $x^2 = -5x - 6$.

Remarque Une inégalité dans laquelle intervient une inconnue est appelé **inéquation**.
Par exemple : 1,2 est solution de l'inéquation $5x - 4 > 1$ car $5 \times 1{,}2 - 4 = 2 > 0$

III. *Transformer une égalité pour résoudre une équation*

Vocabulaire **Résoudre une équation** d'inconnue x, c'est **trouver toutes les solutions** de cette équation : autrement dit, c'est trouver par quel(s) nombre(s) il faut remplacer l'inconnue x pour que l'égalité soit vraie.

Méthode Pour résoudre une équation, on la transforme par étapes pour obtenir une équation de la forme "x = a" où a est le nombre cherché : la solution.

Règles On conserve une égalité lorsque :

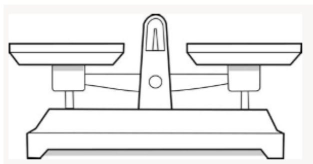
- On ajoute ou soustrait un même nombre aux deux membres de l'égalité ;
- On multiplie ou divise par un même nombre (différent de 0) les deux membres de l'égalité.

Pour mieux comprendre…

Si **A**, **B** et **k** désignent des nombres (**k** ≠ 0),
alors les égalités suivantes ont les mêmes solutions.

« Autrement dit, une équation est comme une balance…
Pour que l'équilibre reste le même à chaque étape, il faut effectuer la même transformation des deux côtés de l'égalité… »

$$\begin{array}{lrcl} & \mathbf{A} & = & \mathbf{B} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A + k} & = & \mathbf{B + k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A - k} & = & \mathbf{B - k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A \times k} & = & \mathbf{B \times k} \\ \Leftrightarrow & \mathbf{A \div k} & = & \mathbf{B \div k} \end{array}$$



« **Egalité = équilibre** »

EXERCICE TYPE 3 — Résoudre une équation de la forme $ax + b = cx + d$

Résoudre l'équation $7x - 1 = 3x + 5$.

Solution

$$7x - 1 = 3x + 5$$

☞ Pour « regrouper les x » dans un même membre,
on soustrait $3x$ à chaque membre de l'égalité : $7x - 1 \mathbf{- 3x} = 3x + 5 \mathbf{- 3x}$

On réduit : $4x - 1 = \mathbf{5}$

☞ Pour « isoler le terme en x »,
on ajoute 1 à chaque membre de l'égalité : $4x - 1 \mathbf{+ 1} = 5 \mathbf{+ 1}$

On réduit : $4x = 6$

☞ Pour trouver la valeur de x,
on divise par 4 chaque membre de l'égalité : $4x \mathbf{\div 4} = 6 \mathbf{\div 4}$

On réduit : $x = \mathbf{\frac{6}{4}} = \mathbf{\frac{3}{2}}$

Vérification : Avant de conclure, on teste l'égalité avec la calculatrice.

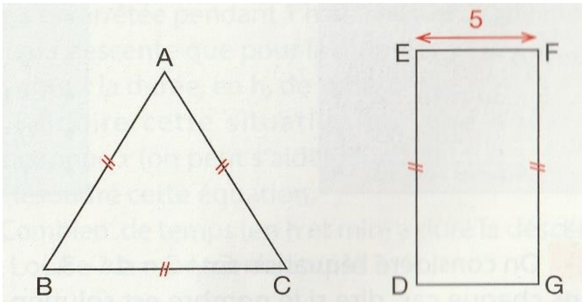
$7\times\mathbf{\frac{3}{2}} - 1 = \mathbf{9{,}5}$ et $3\times\mathbf{\frac{3}{2}} + 5 = \mathbf{9{,}5}$ donc l'égalité est bien vraie pour $x = \mathbf{\frac{3}{2}}$.

Conclusion : L'équation $3x + 1 = 7x - 2$ a une solution : $\mathbf{x = \frac{3}{4} = 0{,}75}$

EXERCICE TYPE 4

Lola affirme : « Ce triangle équilatéral et ce rectangle ne peuvent pas avoir le même périmètre. »

Lola a-t-elle raison ? Expliquer.



Solution

La question revient à chercher s'il existe une longueur AB (égale à BC, AC, ED et FG d'après les codages) telle que ce triangle équilatéral et ce rectangle ait le même périmètre…

- ***Choix de l'inconnue*** : Notons x la longueur du segment [AB].
- ***Traduction de l'énoncé*** :

  Le périmètre du triangle est alors égal à : $3x$
  Le périmètre du rectangle est égal à : $2x + 10$
  Le problème proposé revient donc à trouver s'il existe un nombre x tel que :
  $3x = 2x + 10$

- ***Résolution de l'équation*** :

$$3x = 2x + 10$$
$$3x - \mathbf{2x} = 2x + 10 - \mathbf{2x}$$
$$x = 10$$

Rappel : on commence par isoler les « x »

- ***Vérification*** : $3\times10 = \mathbf{30}$ et $2\times10 + 10 = \mathbf{30}$.
  On trouve bien le même nombre dans les deux membres de l'équation…
- ***Conclusion*** : Lola n'a pas raison : si le triangle équilatéral a pour longueur 10, alors il aura le même périmètre que le rectangle.