Fiche n°5

UTILISER ET TRANSFORMER DES EXPRESSIONS LITTERALES

En mathématiques, on utilise parfois une lettre pour remplacer une grandeur que l'on souhaite étudier (cf. TP n°1). On appelle « **expression littérale** » tout type de calcul dans lequel on utilise une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Exemple Dans le TP n°1 « Construire le contour d'une piscine », nous avons trouvé des expressions littérales permettant de déterminer la longueur **L** et le nombre **N** de dalles nécessaires pour une piscine de largeur **l** :

$$\mathbf{L} = \mathbf{l} + 5$$
$$\mathbf{N} = 2\times\mathbf{l} + 2\times\mathbf{L} + 4$$

I. *Conventions d'écriture dans les expressions littérales*

A savoir Dans une expression littérale, **on peut supprimer le signe « × »** entre :

- Un nombre et une lettre : $5 \times a = 5a$;
- Deux lettres : $a \times b = ab$;
- Un nombre et une parenthèse : $7\times(d + q) = 7(d + q)$;
- Une lettre et une parenthèse : $a\times(b + c) = a(b + c)$;
- Deux parenthèses : $(9 + t)\times(1 - t) = (9 + t)(1 - t)$
- Deux lettres identiques : $a\times a = a^2$ (on dit « *a au carré* »)
- Trois lettres identiques : $a\times a\times a = a^3$ (on dit « *a au cube* »)

EXERCICE TYPE 1 Compléter le tableau suivant en détaillant les calculs si nécessaire.

a	b	a+b	a−b	ab	$\frac{a}{b}$	a^2
8	(−2)					
(−40)	(+5)					
(−6)	(−3)					

Solution

a	b	a+b	a−b	ab	$\frac{a}{b}$	a^2
8	(−2)	$8 + (-2)$ $= 8 - 2$ $= 6$	$8 - (-2)$ $= 8 + 2$ $= 10$	$8 \times (-2)$ $= -16$	$\frac{8}{-2} = -4$	8^2 $= 8\times8$ $= 64$
(−40)	(+5)	$(-40) + (+5)$ $= -40 + 5$ $= -35$	$(-40) - (+5)$ $= -40 - 5$ $= -45$	$(-40) \times (+5)$ $= -200$	$\frac{-40}{+5} = -8$	$(-40)^2$ $= (-40)\times(-40)$ $= 1\,600$
(−6)	(−3)	$(-6) + (-3)$ $= -6 - 3$ $= -9$	$(-6) - (-3)$ $= -6 + 3$ $= -3$	$(-6) \times (-3)$ $= +18 = 18$	$\frac{-6}{-3} = +2 = 2$	$(-6)^2$ $= (-6)\times(-6)$ $= 36$

II. Qu'est-ce que des expressions littérales égales ?

A savoir

¤ Pour tester une égalité, il faut **calculer chaque membre de l'égalité séparément** pour vérifier s'ils sont égaux ou non.

¤ On dit qu'une **égalité d'expressions littérales est vraie** s'il y a égalité pour n'importe quelle valeur choisie…

EXERCICE TYPE 2 **Qu'est-ce qu'une égalité d'expressions littérales ?**

1. Tester l'égalité $n^2 - 6n = 15 - 4n$ pour $n = 5$ puis pour $n = -3$.

2. Peut-on dire que l'égalité $n^2 - 6n = 15 - 4n$ est toujours vraie ?

Solution

1. ¤ Pour $n = 5$, on a : $n^2 - 6n = 5^2 - 6\times5 = 25 - 30 = \mathbf{-5}$
$15 - 4n = 15 - 4\times5 = 15 - 20 = \mathbf{-5}$
L'égalité est donc vraie pour $n = 5$.

¤ Pour $n = -3$, on a : $n^2 - 6n = (-3)^2 - 6\times(-3) = 9 + 18 = \mathbf{27}$
$15 - 4n = 15 - 4\times(-3) = 15 + 12 = \mathbf{27}$
L'égalité est également vraie pour $n = -3$.

2. Pour $b = 0$, on a : $n^2 - 6n = 0^2 - 6\times0 = \mathbf{0}$
$15 - 4n = 15 - 4\times0 = \mathbf{15}$ L'égalité est fausse pour $n = 0$.

Grâce à ce **contre-exemple**, je peux conclure que l'égalité $n^2 - 6n = 15 - 4n$ n'est pas vraie pour n'importe quelle valeur pour n.

III. Utiliser les propriétés de calculs dans les expressions littérales

A savoir

¤ Les règles de calcul connues avec les nombres relatifs s'appliquent aussi en calcul littéral (vu que les lettres permettent de remplacer des nombres…).

¤ **Multiplier plusieurs facteurs** peut se faire dans n'importe quel ordre.

¤ Dans un produit, si l'**un des facteurs est égal à 0**, alors tout le produit est égal à 0.

¤ *Notation* : $\underbrace{\mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \mathbf{a} \times \ldots \times \mathbf{a}}_{\text{avec } n \text{ facteurs (où } n \text{ est un entier supérieur à 1)}}$ se note $\mathbf{a^n}$ et se dit « **a puissance n** »

¤ **Réduire** une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes ou de facteurs possibles (en respectant bien sûr les règles de calcul…)

EXERCICE TYPE 3

1. Utiliser les propriétés de la multiplication et les notations des puissances pour réduire les produits suivants :

$$D = 0,25\mathbf{t} \times 5\mathbf{t} \times 4\mathbf{t} \times 20\mathbf{t}$$

$$E = \frac{3}{5}\mathbf{d} \times \frac{4}{3}\mathbf{d} \times \frac{5}{14}\mathbf{d}$$

2. Calculer le produit $P = (x-1)\times(x-2)\times(x-3)\times\ldots\times(x-16)\times(x-17)$ pour $x = 13$.

3. Réduire les expressions suivantes :
$F = 9x^2 + 6x - 7 - 4x^2 + 2$; $G = = 2x\times5 - 8 - 3x$

Multiplier plusieurs facteurs peut se faire dans n'importe quel ordre

Solution

1. D = 0,25**t** × 5**t** × 4**t** × 20**t** = 0,25 × 4 × 5 × 20 × **t** × **t** × **t** × **t** = 100 $\mathbf{t}^4$

$$E = \frac{3}{5}\mathbf{d} \times \frac{4}{3}\mathbf{d} \times \frac{5}{14}\mathbf{d} = \frac{3}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{14} \times \mathbf{d} \times \mathbf{d} \times \mathbf{d} = \frac{4}{14}\mathbf{d}^3 = \frac{2}{7}\mathbf{d}^3$$

*On dit qu'on a **réduit** les expressions E et F.*

2. D'après la leçon ci-dessus, dans un produit, si l'un des facteurs est égal à 0, alors tout le produit est égal à 0.
Pour x = 13, le facteur (x–13) est égal à 0.
Donc le produit P sera aussi égal à 0.

3. S = $9x^2 + 6x - 7 - 4x^2 + 2 = 5x^2 + 6x - 5$

On regroupe ensemble les termes littéraux du même type : les termes en x^2, les termes en x, puis les termes sans lettres…

T = $2x\times5 - 8 - 3x = 10x - 8 - 3x = 7x - 8$

*La multiplication est **prioritaire**…*

IV. *Développer et factoriser*

1. *Des exemples vus en calcul mental pour mieux comprendre…*

*en **développant**…*		*en **factorisant**…*	
A = 12 × **110**	B = 25 × **99**	C = **137**×5,62 **+** **137**×4,38	D = **125**×8 **–** **125**×7,99
A = 12 × **(10 + 100)**	B = 25 × **(100 – 1)**	C = **137** × (5,62 **+** 4,38)	D = **125** × (8 **–** 7,99)
A = 12×10 **+** 12×100	B = 25×100 **–** 25×1	C = 137 × 10	D = 125 × 0,01
A = 120 + 1 200	B = 2 500 – 25	C = 1370	D = 1,25
A = 1 320	B = 2 475		

A savoir

Développer un produit, c'est transformer ce produit en une somme (ou une différence).

Factoriser une somme (ou une différence), c'est la transformer en un produit.

$$\text{Produit } (\times) \xrightarrow{\textbf{Développer}} \text{Somme } (+) \text{ ou différence } (-)$$
$$\text{Somme } (+) \text{ ou différence } (-) \xrightarrow{\textbf{Factoriser}} \text{Produit } (\times)$$

2. Utiliser la distributivité pour développer ou factoriser

Distributivité simple $\boxed{a(b+c) = ab + ac}$.

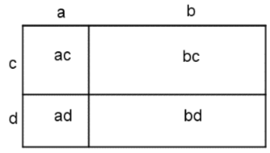
produit somme

Distributivité double $\boxed{(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd}$.

produit somme

Illustration pour mieux comprendre :

l'aire du grand rectangle est égale à la somme des aires des 4 petits rectangles.



EXERCICE TYPE 3 **Transformer une expression littérale**

1. Factoriser les expressions suivantes :

   M = $5x - 7x$; O = $9x^2 - 4x^2$; P = $5x + 7\times 5$; R = $4(2x+1) + (2x+1)(x-1)$

2. Développer et réduire les expressions suivantes :
   - *Distributivité simple :* H = $8(x + 3)$; K = $2x(5x - 1)$; L = $-(3x^2 - 1 + 2x)$
   - *Distributivité double :* J = $(3x - 2)(-2x + 1)$

Solution

1. M = $5\underline{x} - 7\underline{x} = (5 - 7)\underline{x} = -2x$; O = $9\underline{x^2} - 4\underline{x^2} = (9 - 4)\underline{x^2} = 5x^2$

   R = $4\underline{(2x+1)} + \underline{(2x+1)}(x-1) = \underline{(2x+1)}\,[4+(x-1)] = (2x+1)\,[4+x-1] = (2x+1)(x+3)$

   On dit que $(2x+1)$ est le ***facteur commun***.

2. H = $8(x + 3) = 8\times x + 8\times 3 = 8x + 24$

   K = $2x(5x - 1) = 2x\times 5x - 2x\times 1 = 10x^2 - 2x$

   L = $-(3x^2 - 1 + 2x) = -3x^2 + 1 - 2x$

   « On distribue le signe moins ».
   Le calcul est le même que :
   $\mathbf{(-1)} \times (3x^2 - 1 + 2x)$
   Cela revient à ***changer tous les signes*** à l'intérieur des parenthèses…

   J = $(3x - 2)(-2x + 1) = 3x\times(-2x) + 3x\times 1 + (-2)\times(-2x) + (-2)\times 1$

   $= -6x^2 + 3x + 4x - 2 = -6x^2 + 7x - 2$

V. Utiliser le calcul littéral pour se justifier…

EXERCICE TYPE 4 **Analyser un programme de calcul**

Louise propose le programme de calcul suivant à Jeanne.

Jeanne lui répond que « Cela est bien compliqué pour pas grand-chose : il suffit de multiplier le nombre choisi par 10 ! »

Et vous, qu'en pensez-vous ?

Programme de calcul :

- ✓ Choisir un nombre
- ✓ Le multiplier par 5
- ✓ Ajouter 3 au résultat
- ✓ Multiplier le résultat par 2
- ✓ Et enfin soustraire 6…

Solution

Utilisons la lettre x pour représenter le nombre choisi au départ.

Le programme de calcul revient à effectuer le calcul : $(5x + 3)\times 2 - 6 = 2(5x + 3) - 6$

Transformons cette expression littérale : $2(5x+3) - 6 = 10x + 6 - 6 = 10x$

Autrement dit, si x est le nombre choisi au départ, le résultat sera toujours $10x$…

Le programme de calcul proposé est effectivement « bien compliqué » car en fait il revient simplement à multiplier par 10 !…

VI. *Utiliser les lettres pour démontrer un résultat général*

A savoir

Pour **justifier un résultat général** (c'est à dire une affirmation qui doit être vraie pour n'importe quel nombre), on utilise certaines **écritures littérales de nombres particuliers** qu'il faut donc connaître comme par exemple :

- **Multiples** : Multiple de 5 : **5n** ; Multiple de 8 : **8n**
- Nombre **pair** (multiple de 2) : **2n**
- Nombre **impair :** **2n+1**
- Entier **suivant** un entier **n** : **n+1**
- Entier **précédent** un entier n : **n–1**

EXERCICE TYPE 5

1. Choisir au hasard trois nombres entiers positifs consécutifs (qui se suivent…).
   La somme de ces trois nombres semble-t-elle divisible par 3 ?
2. Démontrer que la somme de trois nombres entiers positifs consécutifs est toujours divisible par 3.

Solution

1. Choisissons par exemple les trois nombres suivants : 23, 24 et 25.
   La somme de ces nombres entiers positifs consécutifs est : 23 + 24 + 25 = 72.
   Et 72 est bien divisible par 3. (72 = 24×3)

   Pour avoir une meilleure idée du problème, on peut essayer avec plusieurs nombres entiers consécutifs. Par exemple :

   3+4+5 = 12 et 12 est un multiple de 3 ;
   100+101+102 = 303 et 303 est un multiple de 3 ;
   16+17+18 = 51 et 51 est un multiple de 3…

   Conjecture : Il semble qu'à chaque fois, pour n'importe quels nombres entiers positifs consécutifs choisis au départ, la somme soit toujours un multiple de 3…

2. Pour démontrer que cette conjecture est vraie pour n'importe quels nombres entiers positifs consécutifs choisis au départ, utilisons la lettre **n** pour représenter le deuxième des trois nombres entiers positifs consécutifs.

   L'entier qui précède s'écrira alors **n–1**, et l'entier suivant s'écrira **n+1**.

   La somme de ces trois nombres est alors : **n–1 + n + n+1 = 3n**

   Ainsi, le résultat obtenu est **3n** et sera donc bien toujours divisible par 3, quel que soit le nombre **n** choisi.