Fiche n°2

COMPRENDRE ET UTILISER LES ECRITURES FRACTIONNAIRES

I. *Plusieurs formes d'écritures pour un même nombre*

EXERCICE TYPE 1

Trouver les nombres A, B et C manquants :

a. $100 \times \mathbf{A} = 25$ **b.** $8 \times \mathbf{B} = 34$ **b.** $11 \times \mathbf{C} = 29$

Solution

Un seul nombre possible… mais avec **différentes écritures** possibles !

a. $\mathbf{A} = 25 \div 100 = \mathbf{0{,}25} = \mathbf{\frac{25}{100}} = \mathbf{\frac{2{,}5}{10}} = \mathbf{\frac{1}{4}}$ « 25 centièmes »

b. $\mathbf{B} = 34 \div 8 = \mathbf{\frac{34}{8}} = \mathbf{4{,}25}$ « le quotient de 34 par 8 »

c. $\mathbf{C} = 29 \div 11 = \mathbf{\frac{29}{11}}$ « le quotient de 29 par 11 »

Remarque Ces nombres peuvent avoir plusieurs écritures possibles :

- **Ecritures fractionnaires** : $A = \frac{25}{100} = \frac{2{,}5}{10} = \frac{1}{4}$ $B = \frac{34}{8}$ $C = \frac{29}{11}$
- **Ecritures décimales** : $A = 4{,}25$ $B = 4{,}25$
- Comme le nombre $C = \frac{29}{11}$, certains nombres n'ont pas d'écriture décimale exacte.
  - ¤ $C = \frac{29}{11} \approx 2{,}63636363636…$ La division de 29 par 11 ne s'arrête jamais !
  - ¤ Pour donner une **valeur approchée** d'un nombre, on peut tronquer ou arrondir.

	Encadrement de $\mathbf{\frac{29}{11}}$	***Troncature de*** $\mathbf{\frac{29}{11}}$ *On « coupe » l'écriture du nombre* $\frac{29}{11}$ *après le chiffre souhaité*	***Valeur arrondie de*** $\mathbf{\frac{29}{11}}$ *On prend dans l'encadrement le nombre « le plus proche » de* $\frac{29}{11}$
à l'unité	$2 < \frac{29}{11} < 3$	2	3
au dixième	$2{,}6 < \frac{29}{11} < 2{,}7$	2,6	2,6
au centième	$2{,}63 < \frac{29}{11} < 2{,}64$	2,63	2,64

II. Des écritures fractionnaires égales : la règle fondamentale !

REGLE FONDAMENTALE

La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie (ou si l'on divise) par un même nombre non nul son numérateur et son dénominateur.

Autrement dit Si **a, b** et **k** représentent des nombres (différents de 0) : $\frac{a}{b} = \frac{a \times \mathbf{k}}{b \times \mathbf{k}}$

Exemples

¤ $\frac{4}{5} = \frac{4 \times \mathbf{3}}{5 \times \mathbf{3}} = \frac{12}{15}$

¤ $\frac{14}{21} = \frac{2 \times \mathbf{7}}{3 \times \mathbf{7}} = \frac{2}{3}$ On dit que l' « on a ***simplifié*** la fraction $\frac{14}{21}$ par 7 ».

¤ Cette propriété s'applique aussi pour les quotients de nombres relatifs :

$\frac{-2}{-3} = \frac{-2 \times \mathbf{(-1)}}{-3 \times \mathbf{(-1)}} = \frac{2}{3}$ ou encore $\frac{9}{-5} = \frac{-9}{5} = -\frac{9}{5}$

¤ Cette propriété est vraie pour toute écriture fractionnaire :

$\frac{8,4}{0,04} = \frac{8,4 \times \mathbf{100}}{0,04 \times \mathbf{100}} = \frac{840}{4} = 210$

Autrement dit : diviser 8,4 par 0,04 revient à diviser 840 par 4 (plus facile 😊...).

EXERCICE TYPE 2

1. Donner trois fractions égales au nombre $\mathbf{D} = \frac{-\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$.
2. Trouver une fraction égale à $\frac{\mathbf{8,4}}{\mathbf{0,04}}$, puis calculer mentalement **E = 8,4 ÷ 0,04**.
3. Simplifier le plus possible la fraction $\mathbf{F} = \frac{\mathbf{954}}{\mathbf{234}}$ (en détaillant les calculs).

Solution

1. $\mathbf{D} = \frac{-4}{5} = \frac{-4 \times 2}{5 \times 2} = \frac{-\mathbf{8}}{\mathbf{10}}$; $\frac{-4}{5} = \frac{-4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{-\mathbf{12}}{\mathbf{15}}$; $\frac{-4}{5} = \frac{-4 \times (-7)}{5 \times (-7)} = \frac{\mathbf{28}}{-\mathbf{35}}$

   On peut donc écrire : $\mathbf{D} = \frac{-4}{5} = \frac{-8}{10} = \frac{-12}{15} = \frac{28}{-35}$ Quatre écritures du **même nombre**.

2. La règle fondamentale est vraie pour toute écriture fractionnaire !

   On a donc : $\frac{8,4}{0,04} = \frac{8,4 \times 100}{0,04 \times 100} = \frac{\mathbf{840}}{\mathbf{4}}$

   On peut alors calculer de tête 😊 : $\mathbf{E} = 8,4 \div 0,04 = \frac{8,4}{0,04} = \frac{840}{4} = \mathbf{210}$.

3. ¤ *1ère démarche* : **avec la calculatrice**...

   La calculatrice donne toujours des fractions simplifiées : savoir bien l'utiliser permet de vérifier ses calculs et d'expliquer les simplifications...

   Avec la calculatrice, on obtient : $\mathbf{F} = \frac{954}{234} = \frac{53}{13}$.

   Comme 954÷53 = **18** ou 234÷13 = **18**, on peut écrire : $\mathbf{F} = \frac{954}{234} = \frac{53 \times \mathbf{18}}{13 \times \mathbf{18}} = \boxed{\frac{53}{13}}$

   ¤ *2ème démarche* : **avec les règles de divisibilité**...

   Les nombres 954 et 234 sont tous les deux divisibles par 2 et par 9...

   On peut donc écrire : $\mathbf{F} = \frac{954}{234} = \frac{477 \times \mathbf{2}}{117 \times \mathbf{2}} = \frac{477}{117} = \frac{53 \times \mathbf{9}}{13 \times \mathbf{9}} = \boxed{\frac{53}{13}}$

III. *Somme et différence de nombres en écriture fractionnaire*

Méthode Pour additionner (ou soustraire) deux nombres en écriture fractionnaire, ***on les transforme pour obtenir un même dénominateur***, puis on additionne (ou soustrait) uniquement les numérateurs (*en gardant le dénominateur commun*).

EXERCICE TYPE 3 Calculer $\mathbf{A} = \frac{5}{12} + \frac{9}{12}$; $\mathbf{B} = \frac{-5}{8} + \frac{3}{16}$ et $\mathbf{C} = \frac{8}{25} + \frac{-4}{15}$

Solution

Les deux fractions ont le même dénominateur…

¤ $\mathbf{A} = \frac{5}{12} + \frac{9}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

*Ne pas oublier de **simplifier la fraction**…*

¤ $\mathbf{B} = \frac{-5}{8} + \frac{3}{16}$

$= \frac{-5 \times 2}{8 \times 2} + \frac{3}{16}$

$= \frac{-10}{16} + \frac{3}{16} = \frac{-7}{16}$

Les deux fractions n'ont pas le même dénominateur…

Je transforme $\frac{5}{8}$ *en une fraction de même dénominateur que* $\frac{3}{16}$.

Je multiplie son numérateur et son dénominateur par 2 car $8 \times 2 =$

¤ $\mathbf{C} = \frac{8}{25} + \frac{-4}{15}$.

- Pour trouver le **dénominateur commun**, on écrit les multiples de 25 et de 15 :

  Multiples de 25 : 25 ; 50 ; ***75*** ; 100 …
  Multiples de 15 : 15 ; 30 ; 45 ; 60 ; ***75*** …

- On effectue ensuite le calcul en transformant les fractions en fractions de dénominateur ***75*** :

$$\mathbf{C} = \frac{8}{25} + \frac{-4}{15}$$

$$= \frac{8 \times 3}{25 \times 3} + \frac{-4 \times 5}{15 \times 5}$$

$$= \frac{24}{75} + \frac{-20}{75} = \frac{4}{75}.$$

IV. Produit et quotient de nombres en écriture fractionnaire

1. Produit de nombres en écritures fractionnaires

Règles de calcul

¤ Pour calculer le produit de deux nombres en écriture fractionnaire, on multiplie ***les numérateurs entre eux*** et ***les dénominateurs entre eux,*** en respectant ***les règles des signes***.

Autrement dit, si **a**, **b**, **c** et **d** sont des nombres (différents de 0),
alors on peut écrire $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$

EXERCICE TYPE 4 **Calculer le produit de deux fractions**

Calculer $A = \frac{3}{-5} \times \frac{-2}{-7}$, $B = \frac{7}{4} \times \frac{8}{-3}$ et $C = -2 \times \frac{-5}{3}$, et donner chaque résultat sous forme d'une fraction la plus simple possible.

Solution

On applique la règle des signes pour le produit et le quotient de nombres relatifs…

$A = \frac{3}{-5} \times \frac{-2}{-7} = -\frac{3 \times 2}{5 \times 7} = -\frac{6}{35}$ Ici, on ne peut pas simplifier cette fraction.

$B = \frac{7}{4} \times \frac{8}{-3} = -\frac{7 \times 8}{4 \times 3} = -\frac{7 \times \cancel{4} \times 2}{\cancel{4} \times 3} = -\frac{14}{3}$

Penser à simplifier la fraction <u>avant</u> d'effectuer les produits.

$C = -2 \times \frac{-5}{3} = \frac{2}{1} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

2. Quotient de nombres en écritures fractionnaires

Définition L'***inverse d'un nombre b*** non nul est le nombre qui multiplié par ***b*** donne 1.
Autrement dit, **l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$** car $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Exemples L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ car $2 \times \frac{1}{2} = 1$; L'inverse de $\frac{2}{3}$ est $\frac{3}{2}$ car $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$.

Règles de calcul

Diviser par un nombre, c'est ***multiplier par son inverse***.
Autrement dit, si **a**, **b**, **c** et **d** sont des nombres (différents de 0),
alors on peut écrire $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

Exemple $-\frac{5}{7} \div \frac{3}{4} = -\frac{5}{7} \times \frac{4}{3} = -\frac{20}{21}$

EXERCICE TYPE 5 **Calculer le produit de deux fractions**

Calculer $D = \frac{3}{-5} \div \frac{3}{7}$ et $E = \frac{-5}{3} \div 4$.

Solution $D = \frac{3}{-5} \div \frac{3}{7} = \frac{3}{-5} \times \frac{7}{3} = -\frac{7}{5}$; $E = \frac{-5}{3} \div 4 = \frac{-5}{3} \times \frac{1}{4} = -\frac{5}{12}$