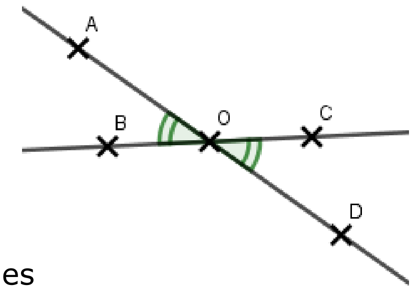
Chapitre n°10

DES FIGURES-CLES AVEC DES ANGLES

I. *Angles opposés par le sommet*

Définition Deux angles sont dits **opposés par le sommet** s'ils ont le même sommet et des côtés dans le même prolongement.

Figure-clé



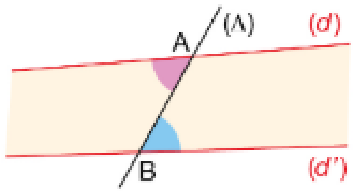
Propriété **Si** deux angles sont opposés par le sommet, **alors** ils ont la même mesure.

Démonstration

Si deux angles sont opposés par le sommet O, ces angles sont en fait symétriques par rapport à O. D'après la leçon sur la symétrie centrale, si deux angles sont symétrique par rapport à un point, alors ils sont égaux… Donc deux angles opposés par le sommet sont égaux.

Exemple Dans la figure-clé ci-contre, les droites (AD) et (BC) sont sécantes en O. Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet et ont donc la même mesure.

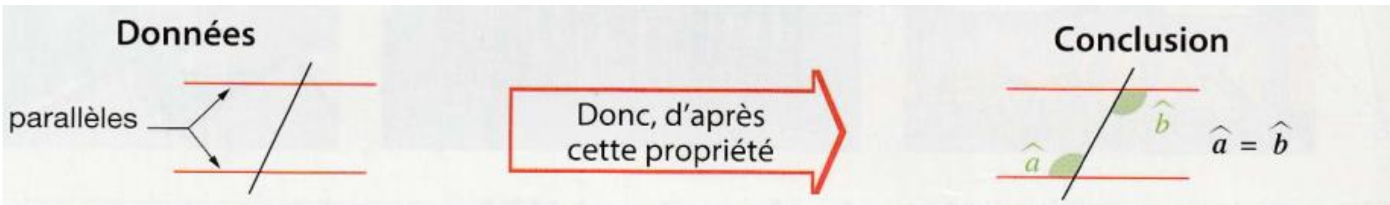
II. *Angles alternes-internes*



Définition Deux angles sont dits **alternes internes** si, comme dans la figure ci-contre :
- les angles sont situés de chaque côté de la sécante (Δ) > « *Alternes* »
- les angles sont situés entre les deux droites (*d*) et (*d'*) > « *Internes* »

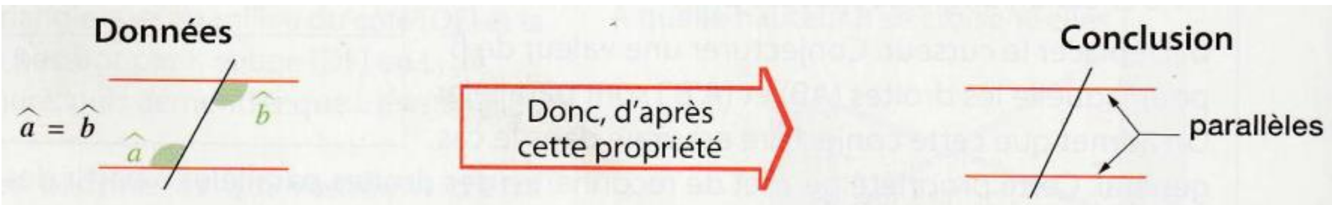
Propriété (admise) **Pour montrer que deux angles sont égaux**

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, **alors** les angles alternes-internes sont égaux.

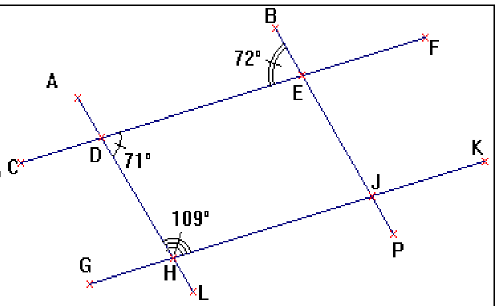


Propriété (admise) **Pour montrer que deux droites sont parallèles**

Si deux droites coupées par une sécante formant des angles alternes-internes égaux, **alors** ces droites sont parallèles.



EXERCICE TYPE 1



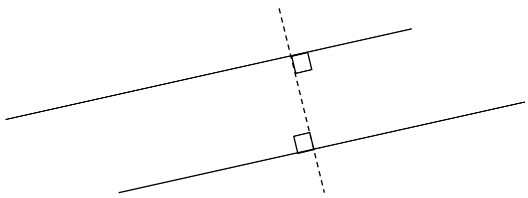
On considère la figure ci-contre.
1. Les droites (CF) et (GK) sont-elles parallèles ? **Justifier.**
2. Les droites (AL) et (BP) sont-elles parallèles ? **Justifier.**

Solution :

1. D'après le codage de la figure, les droites (CF) et (GK) sont coupées par la droite (AL) en formant deux angles alternes-internes $\widehat{HDE} = 71°$ et $\widehat{GHD} = 180 - 109 = 71°$
D'après la leçon ci-dessus, si deux droites coupées par une sécante formant des angles alternes-internes égaux, alors ces droites sont parallèles.
Comme $\widehat{HDE} = \widehat{GHD}$, on peut conclure que les droites (AL) et (BP) sont bien parallèles.

2. D'après le codage de la figure, les droits (AL) et (BP) sont coupées par la droite (CF) en formant deux angles alternes-internes $\widehat{HDE} = 71°$ et $\widehat{BED} = 72°$**.**
D'après la leçon ci-dessus, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes doivent être égaux.
Comme $\widehat{HDE} \neq \widehat{BED}$, on peut conclure que les droites (AL) et (BP) ne peuvent pas être parallèles (même si cela ne se voit pas à l'œil nu)…

Remarque 1 En appliquant les propriétés des angles alternes-internes ci-dessus avec des angles droits, cela permet de démontrer les propriétés sur le parallélisme et la perpendicularité vues en 6ème.



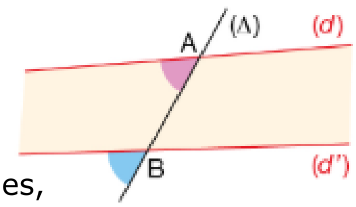
Propriétés **Pour montrer que deux droites sont parallèles, ou perpendiculaires**

Si deux droites sont parallèles,
alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième,
alors elles sont parallèles entre elles.

Remarque 2 La configuration ci-contre définit des angles dits **angles correspondants**.

Dans une telle configuration, en utilisant les angles opposés par le sommet B et les angles alternes-internes, on démontre également les propriétés suivantes :



Propriétés (admises)

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante,
alors les angles correspondants sont égaux.

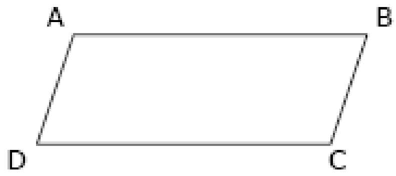
Si deux droites coupées par une sécante formant des angles correspondants égaux,
alors ces droites sont parallèles.

III. Découvrir un quadrilatère particulier : le parallélogramme

Définition Un ***parallélogramme*** est un quadrilatère dont les ***côtés opposés*** sont deux à deux ***parallèles***.

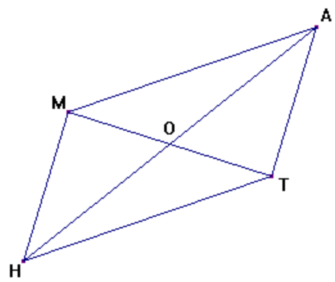
Vocabulaire

Cette figure représente le parallélogramme ABCD ou ADCB ou BCDA ou … (mais **surtout pas** ABDC !).



- ★ [AB] et [BC] sont des **cotés consécutifs.**
- ★ [AB] et [CD] sont des **cotés opposés.**
- ★ A et B sont des **sommets consécutifs.**
- ★ B et D sont des **sommets opposés.**
- ★ $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCD}$ sont des **angles consécutifs.**
- ★ $\widehat{BCD}$ et $\widehat{BAD}$ sont des **angles opposés.**
- ★ [AC] et [BD] sont les **diagonales** du parallélogramme.

Propriété (admise)
Un quadrilatère dont le ***point d'intersection des diagonales*** est un ***centre de symétrie*** est un parallélogramme.



Exemple On dit que MATH est un ***parallélogramme de centre O***.

Propriétés du parallélogramme :

Si *un quadrilatère est un* ***parallélogramme, alors :***

- ✓ ses côtés opposés sont parallèles (définition) — *(AM) // (HT) et (MH) // (AT).*
- ✓ les diagonales se coupent en leur milieu ; — *O est le milieu de [MT] et de [AH]*
- ✓ ses côtés opposés ont la même longueur ; — *AM = HT et MH = AT.*
- ✓ ses angles opposés sont de la même mesure. — $\widehat{AMH} = \widehat{ATH}$ *et* $\widehat{MAT} = \widehat{MHT}$.

Preuve :

Non rédigée ici mais démonstration effectuée en classe à partir de la définition, de la propriété précédente et des propriétés de la symétrie centrale (voir chapitre n°2…), comme pour les propriétés des angles alternes-internes.