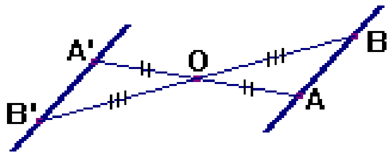
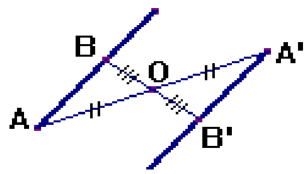
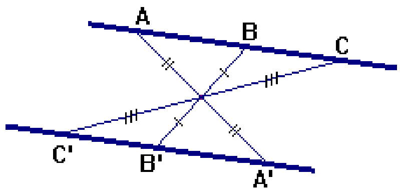
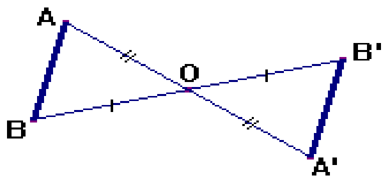
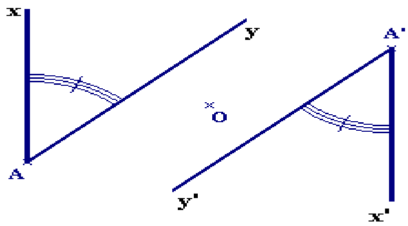
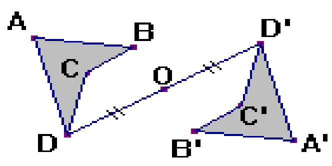
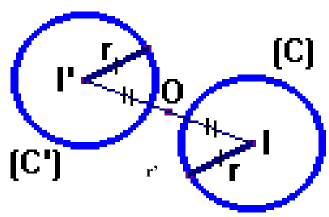
Chapitre n°4

APPRENDRE A SE JUSTIFIER EN GEOMETRIE (INITIATION A LA DEMONSTRATION)

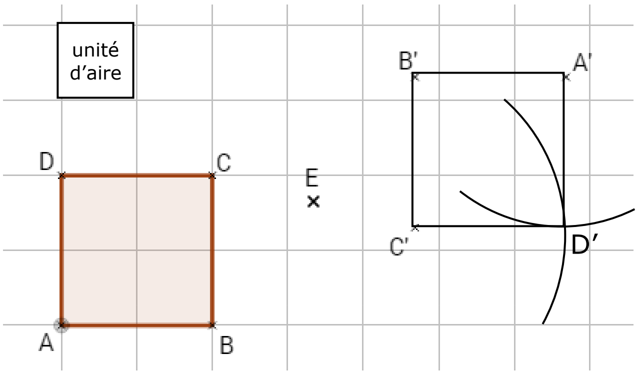
I. *Avec les propriétés de la symétrie centrale…*

Propriétés et figures-clé

Si deux **droites** sont symétriques par rapport à un point, **alors** ces droites sont **parallèles** . *Sur la figure-clé, on peut conclure que :* *(AB) // (A'B')*	
Si deux **demi-droites** sont symétriques par rapport à un point, **alors** ces demi-droites sont **parallèles** mais sont de **sens contraire**. *Sur la figure-clé, on peut conclure que :* *[AB) et [A'B') sont parallèles mais de sens contraire.*	
Si trois points sont **alignés**, **alors** leurs symétriques sont aussi **alignés**. *Sur la figure-clé, on peut conclure que :* *A', B' et C' sont alignés*	
Si deux **segments** sont symétriques par rapport à un point, **alors** ces segments ont la **même longueur** . *Sur la figure-clé, on peut conclure que :* *AB = A'B'*	
Si deux **angles** sont symétriques par rapport à un point, **alors** ces angles ont la **même mesure**. *Sur la figure-clé, on peut conclure que :* $\widehat{xAy} = \widehat{x'A'y'}$	
Si deux **figures** sont symétriques par rapport à un point, **alors** ces figures ont la **même aire**. *Sur la figure-clé, on peut conclure que* *Les figures ABCD et A'B'C'D' ont la même aire.* *(Elles peuvent se superposer)*	
Si deux **cercles** sont symétriques par rapport à un point, **alors** ces cercles ont le **même rayon**. *Sur la figure-clé, on peut conclure que* *Les cercles (C) et (C') ont le même rayon (r = r')*	

EXERCICE TYPE 1 **Uniquement au compas**

Avec un logiciel de géométrie, on a obtenu la figure ci-dessous où ABCD est un carré et où A′, B′ et C′ sont les symétriques respectifs de s points A, B et C par rapport au point E.



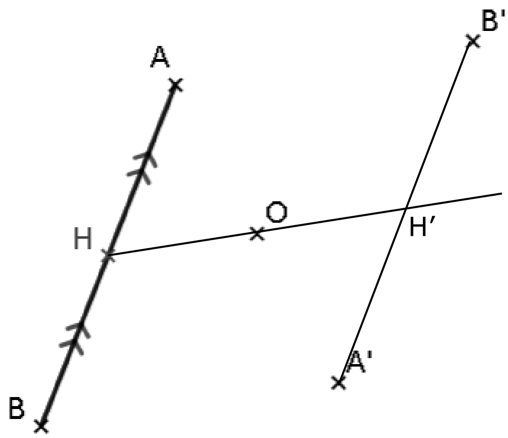
1. Construire le point D′, symétrique du point B par rapport au point O <u>uniquement avec le compas</u> (sans utiliser la règle…).
2. En prenant un carreau comme unité d’aire, déterminer l’aire du carré A’B’C’D’. Justifier.

Solution

1. Grâce à la propriété « Si deux segments sont symétriques par rapport à un point, alors ces segments ont la même longueur. », on a reporté uniquement avec le compas les longueurs AD et CD à partir des points A’ et C’ pour trouver le point D’…
2. Le carré A’B’C’D’ a la même aire que le carré ABCD car, d’après la leçon, « si deux figures sont symétriques par rapport à un point, alors elles ont la même aire ».
L’aire du carré A’B’C’D’ est donc de 4 carreaux.

EXERCICE TYPE 2 **Uniquement avec la règle**

A l’aide d’un logiciel de géométrie, on a obtenu la figure ci-contre où les points A′ et B′ sont les symétriques des points A et B par la symétrie de centre O.



1. Construire le point H′, symétrique du point H par rapport au point O <u>uniquement avec la règle.</u>
(sans utiliser les graduations)
2. Que représente le point H’ pour le segment [A’B’] ?
Justifier à l’aide d’une propriété de la leçon.

Solution

1. Grâce à la propriété « Si trois points sont alignés, alors leurs symétriques par rapport à un point sont aussi alignés », il suffit de tracer les demi-droites [HO) puis le segment [AB].
2. Comme vu ci-dessus, on sait que les points A’, H’ et B’ sont alignés.
Mais, d’après la leçon, « si deux segments sont symétriques par rapport à un point, alors ces segments ont la même longueur ».
On peut donc en conclure que les segments [A’H’] et [H’B’] ont la même longueur que les segments [AH] et [HB] : le point H’ est donc aussi le milieu de [A’B’].

Remarque Comme pour la symétrie axiale, on dit que **la symétrie centrale conserve** (ne change pas) :

- ¤ **l'alignement** ;
- ¤ les **longueurs** (périmètres, rayons, milieu, ...) ;
- ¤ la **mesure des angles** ;
- ¤ les **aires**.

II. *Avec les propriétés des cercles et des médiatrices*

<u>*Définition*</u> **Cercle et disque** *(rappel de 6ème)*

Le **cercle** de centre A et de rayon **r** est l'ensemble de **tous** les points situés **à la même distance r** du point A.
Le **disque** de centre A et de rayon **r** est l'ensemble de **tous** les points situés à une distance du point A **inférieure ou égale à r**.

<u>*Propriété*</u> **Médiatrice d'un segment** *(rappel : voir séquence n°2 « symétrie axiale »)*

Un point de la médiatrice d'un segment est un point situé à la même distance (« **équidistant** ») des extrémités de ce segment.

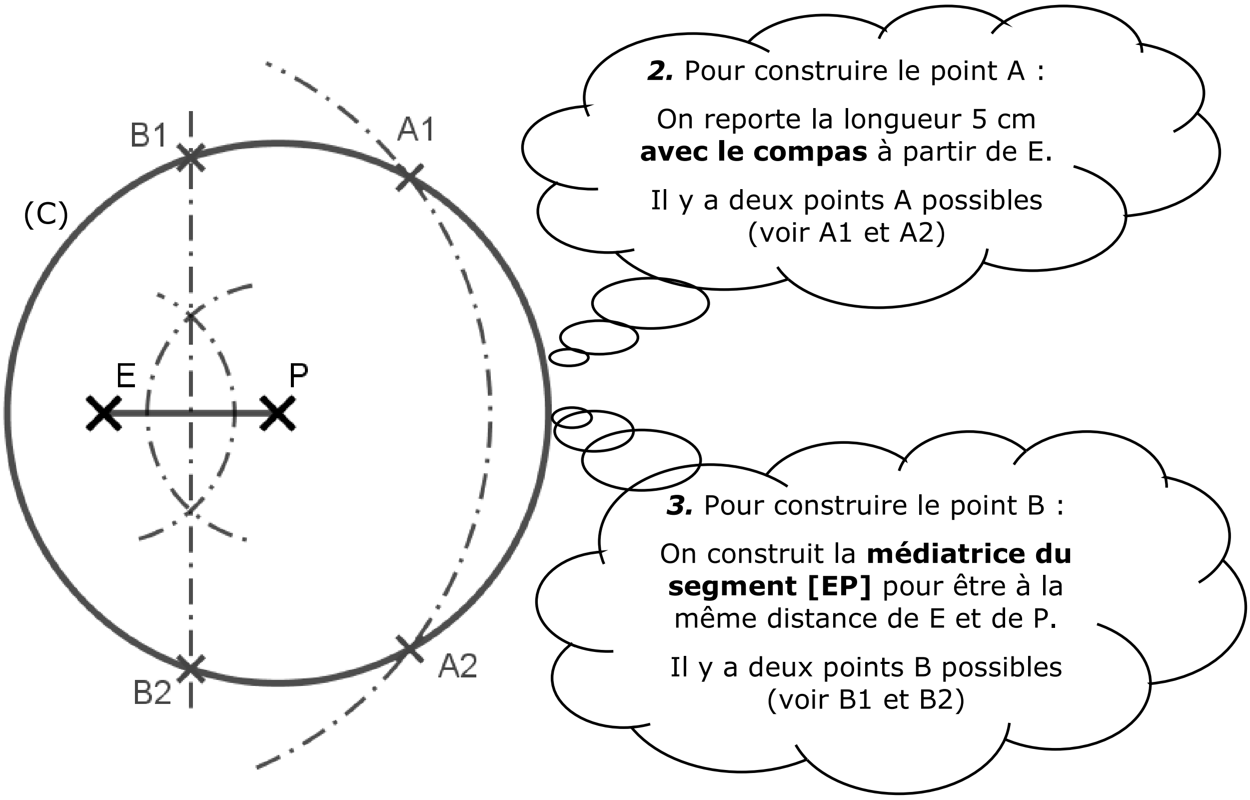
EXERCICE TYPE 3 **Résoudre des problèmes de distance**

1. Construire un segment [EP] de longueur 2,3 cm, puis le cercle (C) de centre P et de rayon 3,5 cm.

2. Placer sur le cercle (C) un point A situé exactement à 5 cm de E.

3. Placer précisément sur le cercle (C) un point B situé à la même distance de E et de P.

<u>*Solution*</u>



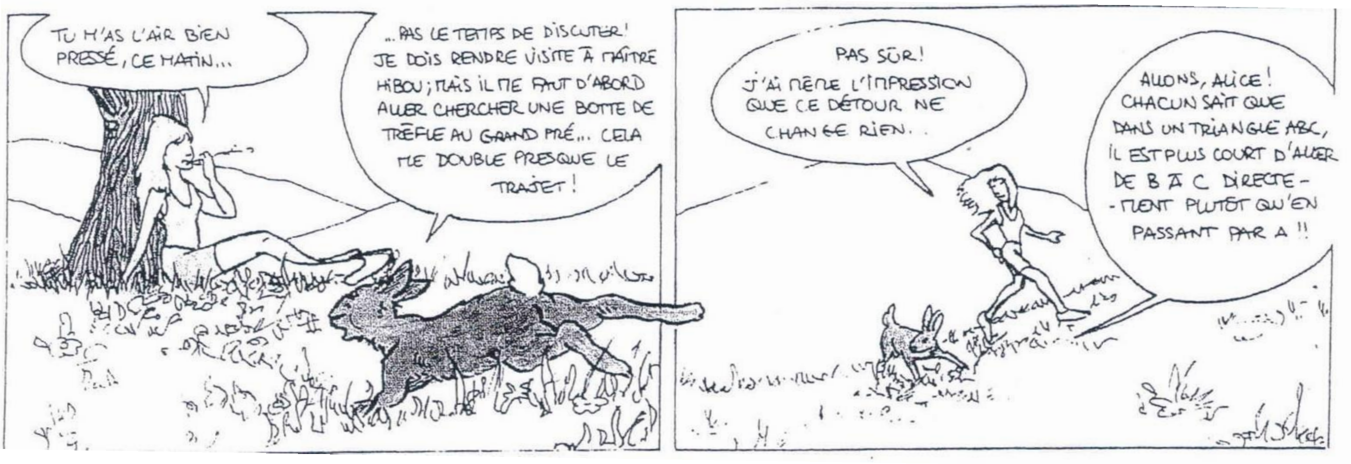
III. *Avec l'inégalité triangulaire pour construire un triangle de longueurs données*

Propriété **Inégalité triangulaire**

Dans tous les triangles, la somme des longueurs de deux côtés est supérieure à la longueur du troisième côté.

Autrement dit

Pour qu'un triangle existe et ne soit pas aplati, la somme des longueurs des deux plus petits côtés doit être strictement supérieure à la longueur du plus grand côté.



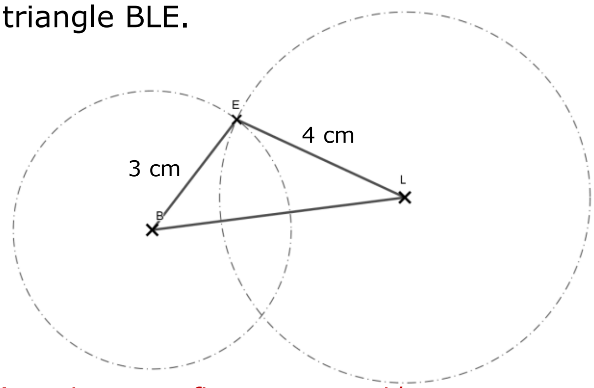
EXERCICE TYPE 4 **Construire un triangle de longueurs données**

1. Construire, si possible, un triangle MIL tel que MI = 3 cm, IL = 10 cm et LM = 5 cm.
2. Construire, si possible, un triangle BLE tel que BL = 5,5 cm, EB = 3 cm et LE = 4 cm.

Solution

1. La plus grande longueur est IL = 10 cm. On a : MI + LM = 3 + 5 = 8 cm.
   Comme IL > MI + ML, on ne peut pas construire le triangle MIL.
2. La plus grande longueur est BL = 5,5 cm. On a : EB + LE = 3 + 4 = 7 cm.
   Comme BL < EB LE, on peut construire le triangle BLE.

Avant la construction, on réalise une ***figure à main levée****, avec tous les points et toutes les données…*



Attention, cette figure est une aide pour montrer les traits de construction mais n'est pas vraie grandeur…

Remarque **Et s'il y a égalité ?**

S'il y a égalité, alors les points sont alignés (triangle aplati).

Autrement dit :
¤ **Si** AC = AB + BC, **alors** B appartient au segment [AC].
¤ **Si** B appartient au segment [AC], **alors** AC = AB + BC.