Chapitre n°3

DIFFERENTES ECRITURES POUR LES NOMBRES

I. *Plusieurs formes d'écritures pour un même nombre*

Notation et vocabulaire

Pour **d** ≠ 0, $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}}$ est une **écriture fractionnaire**.

On dit que $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}}$ est le **quotient de n par d** : $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} = \mathbf{n} \div \mathbf{d}$

Lorsque **n** et **d** sont des ***entiers*** (**d** ≠ 0), $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}}$ est appelé une ***fraction***.

numérateur

Dénominateur

Quatre écritures du **même nombre**.

Exemple

Notons A le nombre 0,25. On peut aussi écrire que : $0{,}25 = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{2{,}5}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

¤ 0,25 est une ***écriture décimale*** du nombre A ;

¤ $\frac{25}{100}$ est une ***fraction décimale*** (quand le dénominateur est 10, 100, 1 000, etc.)

¤ $\frac{2{,}5}{10}$ est une ***écriture fractionnaire*** : A est le ***quotient*** de 2,5 par 10 ;

¤ $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$ sont deux ***fractions*** qui représentent le même nombre A ;

EXERCICE TYPE 1

1. Par quel nombre faut-il multiplier 8 pour obtenir 34 ? $8 \times \mathbf{?} = 34$

2. Par quel nombre faut-il multiplier 7 pour obtenir 53 ? $7 \times \mathbf{?} = 53$

Un seul nombre possible… mais avec différentes écritures possibles !

Solution

1. Le nombre cherché est $\frac{\mathbf{34}}{\mathbf{8}}$, c'est-à-dire le quotient de 34 par 8 : $8 \times \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{8}} = 34$.

¤ Cette fraction a **une écriture décimale <u>exacte</u>** : $\frac{34}{8} = 34 \div 8 = \mathbf{4{,}25}$.

¤ La calculatrice propose aussi une **écriture fractionnaire « simplifiée »** : $\frac{34}{8} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}}$.

2. Le nombre cherché est $\frac{\mathbf{53}}{\mathbf{7}}$, c'est-à-dire le quotient de 53 par 7 : $7 \times \frac{\mathbf{53}}{\mathbf{7}} = 53$.

¤ Attention, **cette fraction n'a pas d'écriture décimale exacte**. Avec la calculatrice, on obtient une **valeur approchée** : $\frac{53}{7} \approx 7{,}571428\ 5714...$ (*La division ne s'arrête jamais*)

¤ Au dixième près, on peut écrire **l'encadrement** : $\mathbf{7{,}5 < \frac{53}{7} < 7{,}6}$

ou encore : $\frac{53}{7} \approx 7{,}5$ (**troncature au dixième** : « on coupe au dixième »)

ou encore : $\frac{53}{7} \approx 7{,}6$ (**valeur arrondie au dixième** : « la plus proche »).

II. Des écritures fractionnaires égales : la règle fondamentale !

REGLE FONDAMENTALE

La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie (ou si l'on divise) par un même nombre non nul son numérateur et son dénominateur.

Autrement dit Si **a, b** et **k** représentent des nombres (différents de 0) : $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

Exemple Démontrons que $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

Il suffit de vérifier que $\frac{2}{3}$ est le nombre manquant dans l'égalité : 15 × **?** = 10

Calculons donc $15 \times \frac{2}{3}$: $15 \times \frac{2}{3} = 5 \times 3 \times \frac{2}{3} = 5 \times 2 = 10$

EXERCICE TYPE 2

1. Donner trois fractions égales à $\mathbf{\frac{4}{5}}$.

2. Trouver une fraction égale à $\mathbf{\frac{8,4}{0,04}}$, puis calculer mentalement **8,4÷0,04**.

Solution ***1.*** $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 2}{5 \times 2} = \mathbf{\frac{8}{10}}$ ¤ $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \mathbf{\frac{12}{15}}$ ¤ $\frac{4}{5} = \frac{4 \times 7}{5 \times 7} = \mathbf{\frac{28}{35}}$

On peut donc écrire : $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15} = \frac{28}{35}$

Quatre écritures du **même nombre**.

2. La règle fondamentale est vraie pour toute écriture fractionnaire !

On a donc : $\frac{8,4}{0,04} = \frac{8,4 \times 100}{0,04 \times 100} = \mathbf{\frac{840}{4}}$

On peut alors calculer de tête 😊 : $8,4 \div 0,04 = \frac{8,4}{0,04} = \frac{840}{4} = 840 \div 4 = \mathbf{210}$.

III. Simplifier une fraction…

1. En décomposant avec les règles de divisibilité…

Règles (à connaître par cœur, pour pouvoir simplifier des fractions)

Un nombre entier est :
- ¤ ***divisible par 2*** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- ¤ ***divisible par 5*** si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- ¤ ***divisible par 10*** si son chiffre des unités est 0 ;
- ¤ ***divisible par 3*** si la somme de ces chiffres est divisible par 3 ;
- ¤ ***divisible par 9*** si la somme de ces chiffres est divisible par 9.

Exemples Parmi les entiers suivants : 19 ; 25 ; 27 ; 40 ; 132 ; 133 ; 246 ; 2 385 ; 17 124

- ¤ les entiers divisibles par 2 sont : 4**0** ; 13**2** ; 24**6** ; 17 12**4**
- ¤ les entiers divisibles par 5 sont : 2**5** ; 4**0** ; 2 38**5**
- ¤ l'entier divisible par 10 est : 4**0**

1+7+1+2+4 = 15 et 15 est dans la table de 3…

- ¤ les entiers divisibles par 3 sont : 27 ; 132 ; 246 ; 2 385 ; 17 124
- ¤ les entiers divisibles par 9 sont : 27 ; 2 385

2+3+8+5 = 18 et 18 est dans la table de 9.

EXERCICE TYPE 3 En utilisant les critères de divisibilité, trouver une fraction « plus simple » égale à $\mathbf{\frac{954}{216}}$.

Solution D'après les règles de divisibilité, on sait que les nombres 954 et 216 sont tous les deux divisibles par 2, par 3 et par 9.
On peut donc décomposer au fur et à mesure :

$$\frac{954}{216} = \frac{477 \times 2}{108 \times 2} = \frac{477}{108} = \frac{53 \times 9}{12 \times 9} = \mathbf{\frac{53}{12}}$$

Avec la calculatrice…

En utilisant la notation fractionnaire de votre calculatrice, celle-ci donne toujours des fractions « plus simples » : il est utile de bien savoir l'utiliser…

EXERCICE TYPE 4 A l'aide de votre calculatrice, proposer des fractions « plus simples » égales aux écritures fractionnaires suivantes : $\mathbf{\frac{954}{216}}$; $\mathbf{\frac{904}{791}}$ et $\mathbf{\frac{9,75}{6,5}}$

Solution Avec la calculatrice, on a :

¤ $\frac{954}{216} = \mathbf{\frac{53}{12}}$ (voir ex-type 3). Comme $954 \div 53 = 18$, on peut justifier : $\frac{954}{216} = \frac{53 \times 18}{12 \times 18} = \frac{53}{12}$

¤ $\frac{904}{791} = \mathbf{\frac{8}{7}}$. Comme $904 \div 8 = 18$, on peut justifier : $\frac{904}{791} = \frac{904 \times 113}{791 \times 113} = \frac{8}{7}$

¤ $\frac{6,5}{9,75} = \mathbf{\frac{2}{3}}$. Comme $6,5 \div 2 = 3,25$, on peut justifier : $\frac{6,5}{9,75} = \frac{2 \times 3,25}{3 \times 3,25} = \frac{2}{3}$

2. En décomposant avec les nombres premiers…

Définition Un **nombre premier** est un nombre entier qui n'a que deux diviseurs : 1 et lui-même.

Contre-exemple Comme $6 = 3 \times 2$, 6 a plusieurs diviseurs : 1, 2, 3 et 6.
6 n'est donc pas un nombre premier.

Exemples Grâce aux tables de multiplication, on peut trouver les nombres premiers compris entre 1 et 30 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

EXERCICE TYPE 5 ***1.*** Décomposer **42**, **45** et **60** en produit de nombres premiers.

2. A l'aide de la question ***1.***, simplifier les fractions $\mathbf{\frac{45}{42}}$, $\mathbf{\frac{42}{60}}$ et $\mathbf{\frac{60}{45}}$

Solution ***1.*** Avec les tables de multiplication, ou les règles de divisibilité, on a :

$42 = 6 \times 7 = \mathbf{3 \times 2 \times 7}$ $\quad 45 = 5 \times 9 = \mathbf{5 \times 3 \times 3}$ $\quad 60 = 6 \times 10 = \mathbf{3 \times 2 \times 2 \times 5}$

2. Utilisons les décompositions en produit de nombres premiers ci-dessus :

$$\frac{45}{42} = \frac{\mathbf{5 \times 3} \times 3}{\mathbf{3 \times} 2 \times 7} = \mathbf{\frac{15}{14}} \qquad \frac{42}{60} = \frac{\mathbf{3 \times 2 \times} 7}{\mathbf{3 \times 2 \times} 2 \times 5} = \mathbf{\frac{7}{10}} \qquad \frac{60}{45} = \frac{\mathbf{3 \times} 2 \times 2 \mathbf{\times 5}}{\mathbf{5 \times 3 \times} 3} = \mathbf{\frac{4}{3}}$$

IV. Division euclidienne et fractions…

Définition Effectuer la **division euclidienne** d'un nombre entier (dividende) par un autre nombre entier (diviseur), c'est trouver deux nombres entiers (quotient et reste) tels que :

- ***Dividende = Diviseur × Quotient + Reste***
- ***Reste < Diviseur***

Exemple Effectuons la division euclidienne de 754 par 8 :

Vérification : $2 < 8$
$8 \times 94 + 2 = 754$

$$\begin{array}{rrr|l} \mathbf{7} & \mathbf{5} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ -7 & 2 & & \\ \hline & 3 & 4 & \mathbf{9}\ \mathbf{4} \\ - & 3 & 2 & \\ \hline & & \mathbf{2} & \end{array}$$

Dividende, Diviseur, Quotient, Reste

Avec la calculatrice…

On peut utiliser la touche $\boxed{\vdash}$.

Si on tape 754 $\boxed{\vdash}$ 8, on obtient comme ci-dessus : Q = 94 et R = 2.

EXERCICE TYPE 6

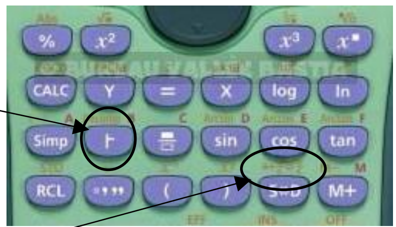
A une fête de mariage, un pâtissier a proposé une multitude de gâteaux, chacun partagé en 12 parts…
A la fin du mariage, Rémi dit à sa maman : « Il reste plein de gâteaux : il reste 67 parts ! »

Combien de gâteaux entiers n'ont pas été mangés ? Et combien reste-t-il de parts sur le gâteau qui reste incomplet ?

Solution Pour résoudre ce problème, il y a plusieurs démarches possibles :

Démarche n°1 : Avec la touche $\boxed{\vdash}$ de la calculatrice,
on obtient : Q = 5 et R = 7.

Il y a donc 5 gâteaux entiers et
il reste 7 parts sur le gâteau incomplet.



Démarche n°2 : On tape $\frac{67}{12}$ et on utilise la touche $\boxed{a+\frac{b}{c}}$.

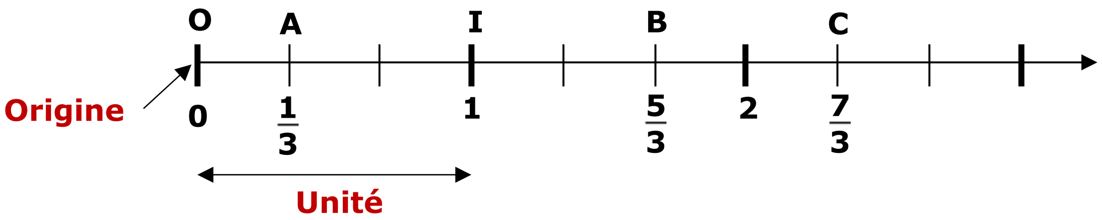
On obtient : $\mathbf{\frac{67}{12} = 5 + \frac{7}{12}}$.

Il y a donc 5 gâteaux entiers et il reste 7 parts sur le gâteau incomplet.

Démarche n°3 : D'après a calculatrice, on a : $67 \div 12 \approx 5{,}58$.
Il y a donc 5 gâteaux entiers…
Pour trouver les parts restantes, on effectue le calcul : $67 - 5 \times 12 = 7$.

V. *Sur un axe gradué*

Autour d'un exemple



L'**unité** est la distance entre l'origine d'abscisse 0 et le point d'**abscisse** 1.

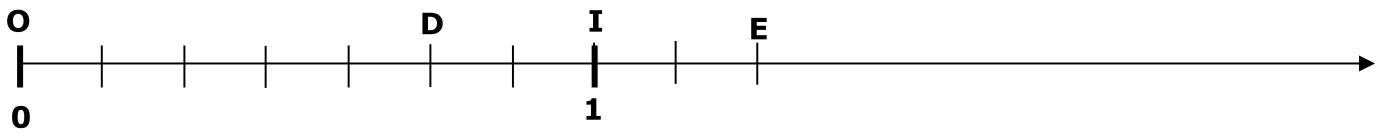
Sur cette demi-droite graduée, les graduations partagent l'unité en 3 segments égaux.

On peut donc dire par exemple que :

- ¤ l'abscisse du point A est $\frac{1}{3}$;
- ¤ l'abscisse du point B est $\frac{5}{3}$ ou encore $1 + \frac{2}{3}$.
- ¤ l'abscisse du point C est $\frac{7}{3}$ ou encore $2 + \frac{1}{3}$.

EXERCICE TYPE 7

On considère la demi-droite graduée d'origine O ci-dessous.



a. Lire les abscisses des points D et E.

b. Sur cette demi-droite graduée, placer le points G($\frac{3}{7}$), H(2) et S($\frac{12}{7}$) .

Solution

Sur cette demi-droite graduée, l'unité est partagée en 7 parts égales.

a. L'unité est divisée en 7 segments égaux.

Les abscisses des points D et E sont donc respectivement $\frac{5}{7}$ et $\frac{9}{7}$.

b. Pour pouvoir placer les points H et S, il faut d'abord prolonger la demi-droite graduée en **reportant régulièrement les graduations avec le compas**…