

Chapitre n°3  
**ECRITURES FRACTIONNAIRES ET PROPORTIONS...**

**I. Plusieurs formes d'écritures pour un même nombre**

Notation et vocabulaire

Pour  $d \neq 0$ ,  $\frac{n}{d}$  est une **écriture fractionnaire**.

On dit que  $\frac{n}{d}$  est le **quotient de n par d** :  $\frac{n}{d} = n \div d$

Lorsque  $n$  et  $d$  sont des **entiers** ( $d \neq 0$ ),  $\frac{n}{d}$  est appelé une **fraction**.

**numérateur**

**Dénominateur**

Quatre écritures du même nombre.

Exemple

Notons A le nombre 0,25. On peut aussi écrire que :  $0,25 = \frac{25}{100} = \frac{2,5}{10} = \frac{1}{4}$ .

- ✕ 0,25 est une **écriture décimale** du nombre A ;
- ✕  $\frac{25}{100}$  est une **fraction décimale** (quand le dénominateur est 10, 100, 1 000, etc.)
- ✕  $\frac{2,5}{10}$  est une **écriture fractionnaire** : A est le **quotient** de 2,5 par 10 ;
- ✕  $\frac{25}{100}$  et  $\frac{1}{4}$  sont deux **fractions** qui représentent le même nombre A ;

**EXERCICE TYPE 1**

- a. Par quel nombre faut-il multiplier 8 pour obtenir 34 ?
- b. Par quel nombre faut-il multiplier 7 pour obtenir 53 ?

Solution

Un seul nombre possible... mais avec différentes écritures possibles !

- a. Le nombre cherché est  $\frac{34}{8}$ , c'est-à-dire le quotient de 34 par 8 :  $8 \times \frac{34}{8} = 34$ .
  - ✕ Cette fraction a une **écriture décimale exacte** :  $\frac{34}{8} = 34 \div 8 = 4,25$ .
  - ✕ La calculatrice propose aussi une **écriture fractionnaire « simplifiée »** :  $\frac{34}{8} = \frac{17}{4}$ .
- b. Le nombre cherché est  $\frac{53}{7}$ , c'est-à-dire le quotient de 53 par 7 :  $7 \times \frac{53}{7} = 53$ .
  - ✕ Attention, **cette fraction n'a pas d'écriture décimale exacte**. Avec la calculatrice, on obtient une **valeur approchée** :  $\frac{53}{7} \approx 7,571428\ 571428...$  (La division ne s'arrête jamais)
  - ✕ Au dixième près, on peut écrire **l'encadrement** :  $7,5 < \frac{53}{7} < 7,6$
  - ou encore :  $\frac{53}{7} \approx 7,5$  (**troncature au dixième** : « on coupe au dixième »)
  - ou encore :  $\frac{53}{7} \approx 7,6$  (**valeur arrondie au dixième** : « la plus proche »).

## II. Des écritures fractionnaires égales : **REGLE FONDAMENTALE**

### Propriété

La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie (ou si l'on divise) par un même nombre non nul son numérateur et son dénominateur.

### Exemples

$$\times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 3} = \frac{12}{15}$$

$$\times \frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3} \quad \text{On dit que l' « on a **simplifié** la fraction } \frac{14}{21} \text{ par 7 ».}$$

× Cette propriété est vraie pour toute écriture fractionnaire :

$$\frac{8,4}{0,04} = \frac{8,4 \times 100}{0,04 \times 100} = \frac{840}{4} = 210$$

Autrement dit, diviser 8,4 par 0,04 revient à diviser 840 par 4 (plus facile 😊...).

### Règles (à connaître par cœur, pour pouvoir simplifier des fractions)

Un nombre entier est :

- × **divisible par 2** si son **chiffre des unités** est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- × **divisible par 5** si son **chiffre des unités** est 0 ou 5 ;
- × **divisible par 10** si son **chiffre des unités** est 0 ;
- × **divisible par 3** si la **somme de ces chiffres** est divisible par 3 ;
- × **divisible par 9** si la **somme de ces chiffres** est divisible par 9.

### Exemples

Parmi les entiers suivants : 19 ; 25 ; 27 ; 40 ; 132 ; 133 ; 246 ; 2 385 ; 17 124

× les entiers divisibles par 2 sont : **40 ; 132 ; 246 ; 17 124**

× les entiers divisibles par 5 sont : **25 ; 40 ; 2 385**

× l'entier divisible par 10 est : **40**

× les entiers divisibles par 3 sont : 27 ; 132 ; 246 ; 2 385 ; 17 124

× les entiers divisibles par 9 sont : 27 ; 2 385

$1+7+1+2+4 = 15$   
et 15 est dans la table de 3...

$2+3+8+5 = 18$  et 18 est dans la table de 9.

### **EXERCICE TYPE 2**

Donner une écriture fractionnaire la plus simple possible de  $\frac{954}{216}$ .

#### Solution

✓ 1<sup>ère</sup> méthode : **avec les règles de divisibilité...**

Les nombres 954 et 216 sont tous les deux divisibles par 2 et par 9...

On peut donc écrire :  $\frac{954}{216} = \frac{477 \times 2}{108 \times 2} = \frac{477}{108} = \frac{53 \times 9}{12 \times 9} = \frac{53}{12}$

✓ 2<sup>ème</sup> méthode : uniquement **avec la calculatrice...**

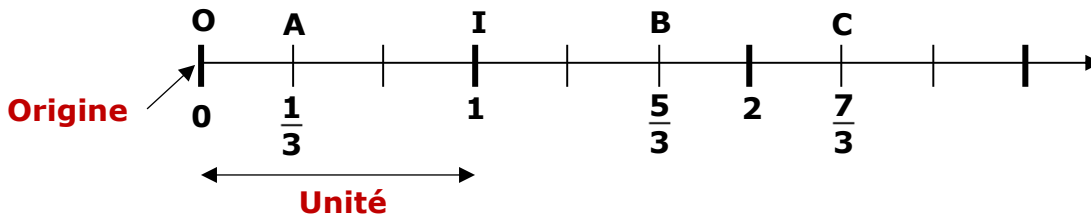
La **calculatrice** donne toujours des fractions simplifiées : savoir bien l'utiliser permet de vérifier ses calculs et d'expliquer la simplifications...

Pour la fraction  $\frac{954}{216}$ , la calculatrice donne directement la fraction  $\frac{53}{12}$ .

Comme  $954 \div 53 = 18$  ou  $216 \div 12 = 18$ , on peut écrire :  $\frac{954}{216} = \frac{53 \times 18}{12 \times 18} = \frac{53}{12}$

### III. Sur un axe gradué

#### Autour d'un exemple



L'unité est la distance entre l'origine d'abscisse 0 et le point d'abscisse 1.

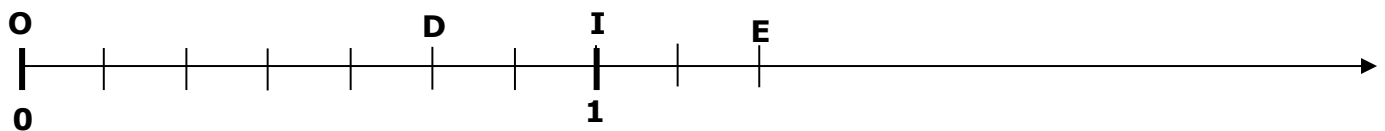
Sur cette demi-droite graduée, les graduations partagent l'unité en 3 segments égaux.

On peut donc dire par exemple que :

- ✕ l'abscisse du point A est  $\frac{1}{3}$  ;
- ✕ l'abscisse du point B est  $\frac{5}{3}$  ou encore  $1 + \frac{2}{3}$  .
- ✕ l'abscisse du point C est  $\frac{7}{3}$  ou encore  $2 + \frac{1}{3}$  .

#### EXERCICE TYPE 3

On considère la demi-droite graduée d'origine O ci-dessous.

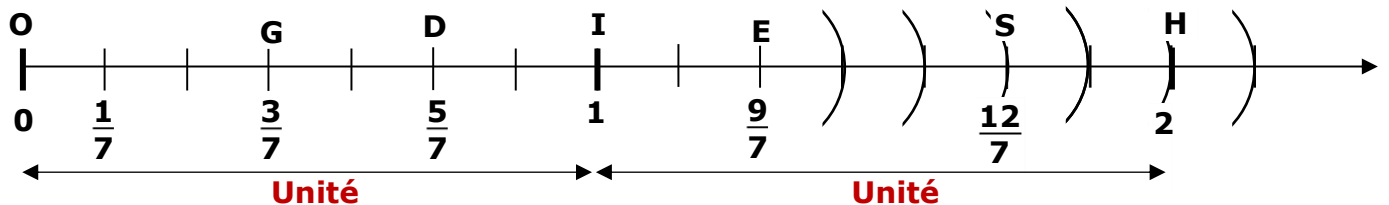


- a. Lire les abscisses des points D et E.
- b. Sur cette demi-droite graduée, placer les points  $G(\frac{3}{7})$ ,  $H(2)$  et  $S(\frac{12}{7})$  .

#### Solution

Sur cette demi-droite graduée, l'unité est partagée en 7 parts égales.

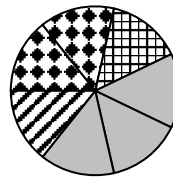
- a. L'unité est divisée en 7 segments égaux.  
Les abscisses des points D et E sont donc respectivement  $\frac{5}{7}$  et  $\frac{9}{7}$ .
- b. Pour pouvoir placer les points H et S, il faut d'abord prolonger la demi-droite graduée en **reportant régulièrement les graduations avec le compas...**



### IV. Proportions et pourcentages

#### EXERCICE TYPE 4 Déterminer et utiliser une proportion.

Marc habite un village où toutes les familles ont au moins un animal domestique. Le diagramme circulaire ci-contre représente la totalité des familles de ce village : il a été partagé en parts égales.



Proportion des familles possédant :  
 ■■ seulement un chien ;  
 □□ seulement un chat ;  
 ■ un chien et un chat ;  
 ▨ un seul animal, mais autre qu'un chien ou un chat.

- Quelle est la proportion des familles qui possèdent :  
 a. seulement un chien ?      b. un seul animal (chien, chat ou autre) ?
- Le village de Marc compte 56 familles.  
 Combien de familles ont seulement un chien dans le village de Marc ?

Solution

- D'après le diagramme circulaire, la proportion des familles qui possèdent seulement un chien est  $\frac{2}{7}$ .
  - Les familles qui possèdent un seul animal ont soit seulement un chien, soit seulement un chat, soit un seul animal autre qu'un chien ou un chat. D'après le diagramme circulaire, la proportion des familles qui possèdent un seul animal (chien, chat ou autre) est  $\frac{4}{7}$ .
- Le village de Marc compte 56 familles et  $\frac{2}{7}$  de ces familles ont seulement un chien.

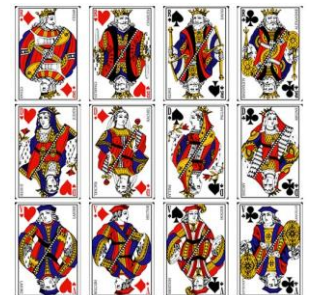
**1<sup>ère</sup> méthode** Le problème revient à écrire :  $\frac{2}{7} = \frac{?}{56}$ .  
 Avec la règle fondamentale, comme  $7 \times 8 = 56$ , on calcule :  $2 \times 8 = 16$

**2<sup>ème</sup> méthode** On calcule  $\frac{2}{7}$  de 56 :  $56 \div 7 \times 2 = \frac{56 \times 2}{7} = 16$

Conclusion : Dans le village de Marc, 16 familles ont seulement un chien.

#### EXERCICE TYPE 5 Exprimer une proportion en pourcentage.

Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la proportion, en pourcentage, des figures (V, D ou R).



Solution

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs soit 12 figures (V, D ou R).

La proportion de figures dans un jeu de 32 cartes est donc :  $\frac{12}{32} = \frac{3 \times 4}{8 \times 4} = \frac{3}{8}$

Transformons cette proportion en pourcentages, c'est-à-dire trouvons une écriture de  $\frac{3}{8}$  avec un dénominateur 100 :  $\frac{3}{8} = \frac{..?..}{100}$

Avec la règle fondamentale :  $\frac{3}{8} = \frac{3 \times 12,5}{8 \times 12,5} = \frac{12,5}{100}$

Il y a 12,5 % de figures dans un jeu de 32 cartes.

Un **pourcentage** est une proportion par rapport à 100.

$$? \% = \frac{?}{100}$$

× ?

$100 \div 8 = 12,5$

## V. Comparer des proportions

**Définition** **Comparer** deux nombres, c'est trouver quel est le nombre le plus petit ou le nombre le plus grand ou s'ils sont égaux.

**Remarque** Pour comparer deux proportions, il faut que les proportions soient comptées **dans la même unité** (cf. activité Mini-combis)

**Méthode** Autrement dit, pour comparer deux fractions, on utilise :

- soit la forme fractionnaire avec un même dénominateur ;
- soit, si c'est possible, des écritures décimales.

### EXERCICE TYPE 6

Un gourmand préférera-t-il manger les trois-quarts d'une tablette de chocolat ou plutôt 73 % de cette tablette ?

#### Solution

Ce problème revient à comparer les fractions  $\frac{3}{4}$  et  $\frac{73}{100}$

Pourcentage :

$$73 \% = \frac{73}{100}$$

#### - 1<sup>ère</sup> méthode : avec des écritures fractionnaires

Trouvons une écriture de  $\frac{3}{4}$  avec un dénominateur 100 :  $\frac{3}{4} = \frac{..?..}{100}$

On applique la règle fondamentale :  $\frac{3}{4} = \frac{3 \times \mathbf{25}}{4 \times \mathbf{25}} = \frac{75}{100}$

$$\begin{array}{c} \text{?} \\ \times \end{array}$$

$$100 \div 4 = \mathbf{25}$$

Comme  $\frac{75}{100} > \frac{73}{100}$ , on peut conclure que  $\frac{3}{4} > \frac{73}{100}$ .

#### - 2<sup>ème</sup> méthode : avec des écritures décimales

Comme  $73 \% = \frac{73}{100} = 0,73$  et  $\frac{3}{4} = 0,75$ , on peut conclure que  $\frac{3}{4} > 73 \%$

**Conclusion** : Le gourmand préférera manger les trois-quarts plutôt que 73 % de la tablette.