Séquence n°5

CERCLES et TRIANGLES : PROBLEMES DE CONSTRUCTIONS

I. *Problèmes de distance ?*

Définition **Cercle et disque** *(rappel de 6ème)*

Le **cercle** de centre A et de rayon **r** est l'ensemble de **tous** les points situés **à la même distance r** du point A.
Le **disque** de centre A et de rayon **r** est l'ensemble de **tous** les points situés à une distance du point A **inférieure ou égale à r**.

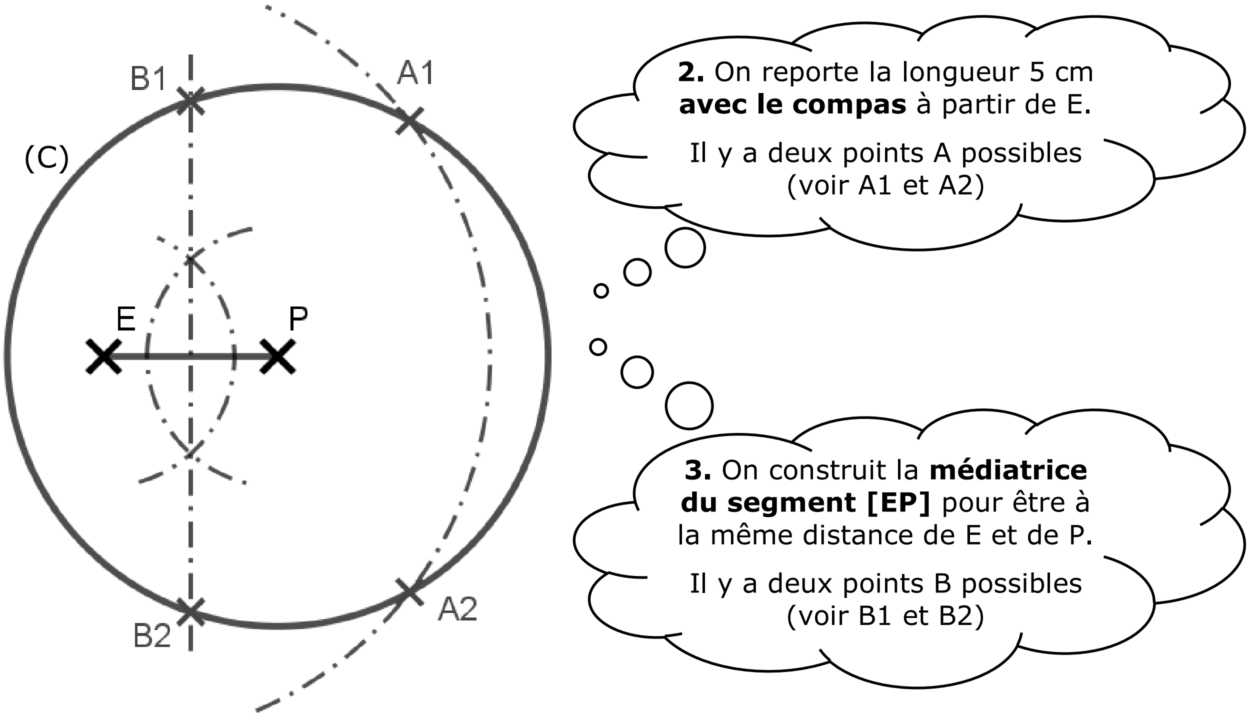
Propriété **Médiatrice d'un segment** *(rappel : voir séquence n°2 « symétrie axiale »)*

Un point de la médiatrice d'un segment est un point situé à la même distance (« **équidistant** ») des extrémités de ce segment.

EXERCICE TYPE 1 **Résoudre des problèmes de distance**

1. Construire un segment [EP] de longueur 2,3 cm, puis le cercle (C) de centre P et de rayon 3,5 cm.
2. Placer sur le cercle (C) un point A situé exactement à 5 cm de E.
3. Placer précisément sur le cercle (C) un point B situé à la même distance de E et de P.

Solution



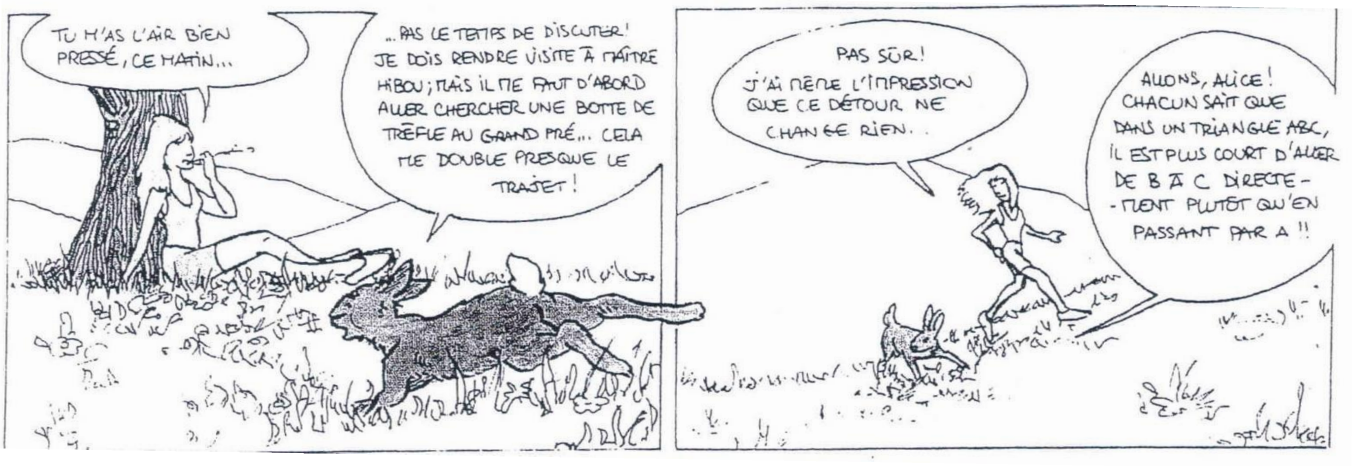
II. *Peut-on construire un triangle de longueurs données ?*

Propriété **Inégalité triangulaire**

Dans tous les triangles, la somme des longueurs de deux côtés est supérieure à la longueur du troisième côté.

Autrement dit

Pour qu'un triangle existe et ne soit pas aplati, la somme des longueurs des deux plus petits côtés doit être strictement supérieure à la longueur du plus grand côté.



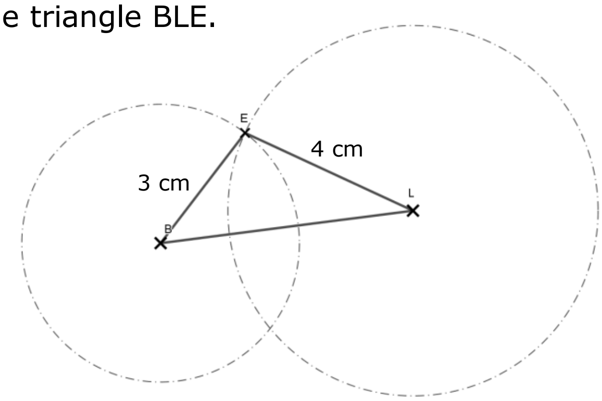
EXERCICE TYPE 2 **Construire un triangle de longueurs données**

1. Construire, si possible, un triangle MIL tel que MI = 3 cm, IL = 10 cm et LM = 5 cm.
2. Construire, si possible, un triangle BLE tel que BL = 5,5 cm, EB = 3 cm et LE = 4 cm.

Solution

1. La plus grande longueur est IL = 10 cm. On a : MI + LM = 3 + 5 = 8 cm.
   Comme IL > MI + ML, on ne peut pas construire le triangle MIL.
2. La plus grande longueur est BL = 5,5 cm. On a : EB + LE = 3 + 4 = 7 cm.
   Comme BL < EB LE, on peut construire le triangle BLE.

Avant la construction, on réalise une ***figure à main levée****, avec tous les points et toutes les données…*



Attention, cette figure est une aide pour montrer les traits de construction mais n'est pas vraie grandeur…

Remarque **Et s'il y a égalité ?**

S'il y a égalité, alors les points sont alignés (triangle aplati).

Autrement dit :
¤ **Si** AC = AB + BC, **alors** B appartient au segment [AC].
¤ **Si** B appartient au segment [AC], **alors** AC = AB + BC.

III. *Premières constructions de triangles avec des angles ?*

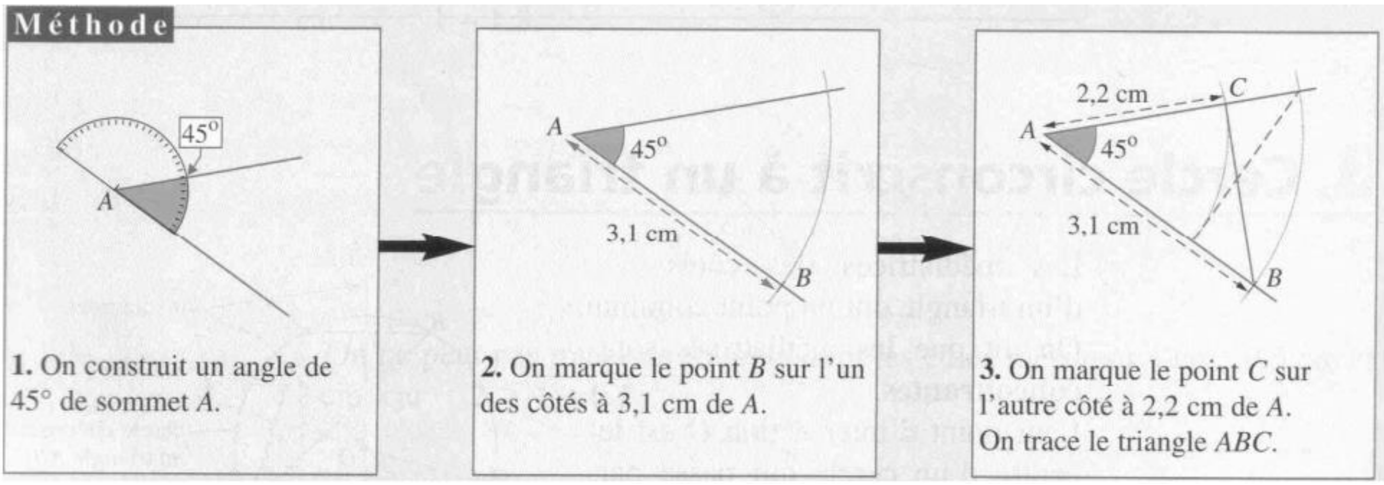
« Adjacents » :
« à côté de… »

EXERCICE TYPE 3 — Avec un angle et deux côtés adjacents

Construire un triangle ABC tel que $\widehat{BAC}$ = 45°, AB = 3,1 cm et AC = 2,2 cm.

Solution Attention, la figure suivante montre la méthode de construction mais n'est pas vraie grandeur…

Rappel : avant la construction, on réalise une ***figure à main levée***, avec toutes les données pour trouver le programme de construction…

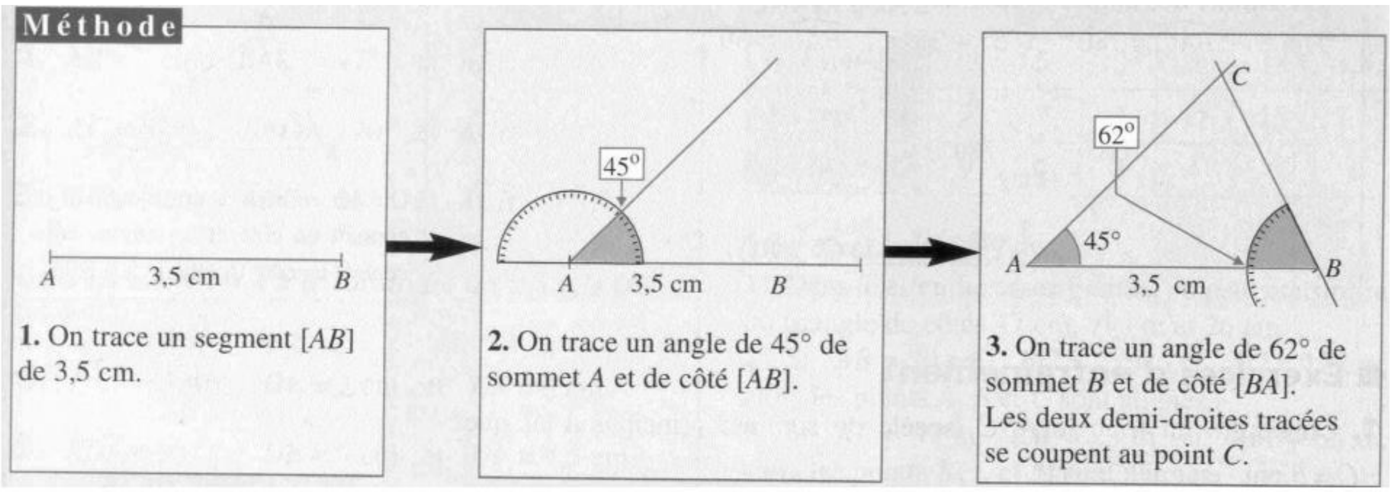


EXERCICE TYPE 4 — Avec un côté et deux angles adjacents

Construire un triangle ABC tel que AB = 3,5 cm, $\widehat{BAC}$ = 45° et $\widehat{ABC}$ = 62°.

Solution Attention, la figure suivante montre les traits de construction mais n'est pas vraie grandeur…

Rappel : avant la construction, une ***figure à main levée*** pour trouver le programme de construction…

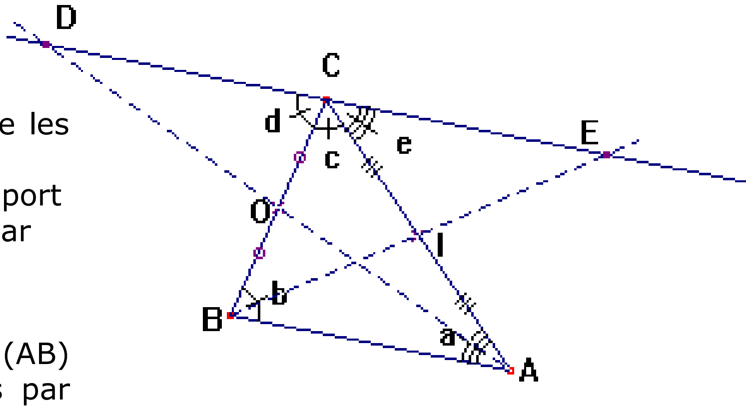


IV. *Somme des angles d'un triangle*

Théorème	**Dans tous les triangles, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.**

Remarque Même si cela peut paraître surprenant, cela est vrai pour n'importe quel triangle ! Plusieurs preuves ont été abordées en classe : ci-dessous, la rédaction d'une démonstration (compliquée car à plusieurs étapes !) utilisant les propriétés de la symétrie centrale…

Démonstration



Soit un triangle ABC quelconque. On considère les milieux O et I des segments [BC] et [AC].
Le point D est le symétrique du point A par rapport à O et le point E est le symétrique du point B par rapport à I.

Etape 1

- La droite (CD) est parallèle à la droite (AB) car ces deux droites sont symétriques par rapport au point O.
- La droite (CE) est parallèle à la droite (AB) car elles sont symétriques par rapport au point I.

Les deux droites (CD) et (CE) sont parallèles à une même troisième (AB), donc elles sont parallèles entre elles.
Et elles ont le point C en commun C : les points D, C et E sont donc alignés, et, avec les notations de la figure, $\boxed{\mathbf{c + d + e = 180°}}$ (**1**)

Etape 2

- Les angles **d** et **b** sont symétriques par rapport à O, donc $\boxed{\mathbf{d = b}}$.
- Les angles **e** et **a** sont symétriques par rapport à I, donc $\boxed{\mathbf{e = a}}$.

Conclusion

En remplaçant **d** par **b**, puis **e** par **a** dans l'égalité (1), on obtient : $\boxed{\mathbf{a + b + c = 180°}}$.

donc **la somme des mesures des trois angles du triangle est égale à 180°**.

EXERCICE TYPE 5 **Déterminer la mesure de troisième angle d'un triangle.**

Un triangle MNP est tel que $\widehat{NMP}$ = 35° et $\widehat{MPN}$ = 45°. Combien mesure l'angle $\widehat{MNP}$?

Solution

Dans le triangle MNP,
D'après *l'énoncé,* on sait que $\widehat{NMP}$ = 35° et $\widehat{MPN}$ = *45°.*

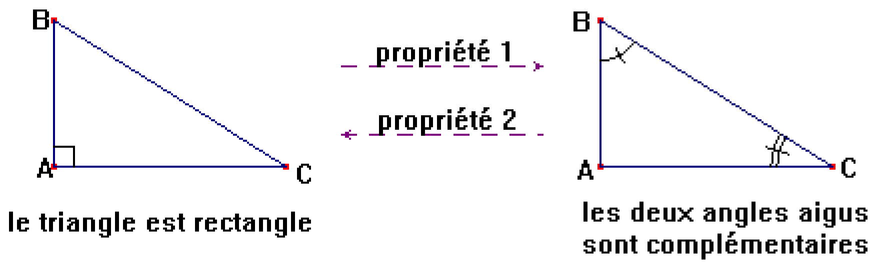
D'après la leçon, dans tous les triangles, la somme des mesures des trois angles est égale à 180°.

Donc $\widehat{MNP}$ = 180° – $\widehat{NMP}$ – $\widehat{MPN}$.
On remplace : $\widehat{MNP}$ = 180° – 35 – 45 .
Conclusion : $\boldsymbol{\widehat{MNP} = 100°}$.

V. *Des figures particulières…*

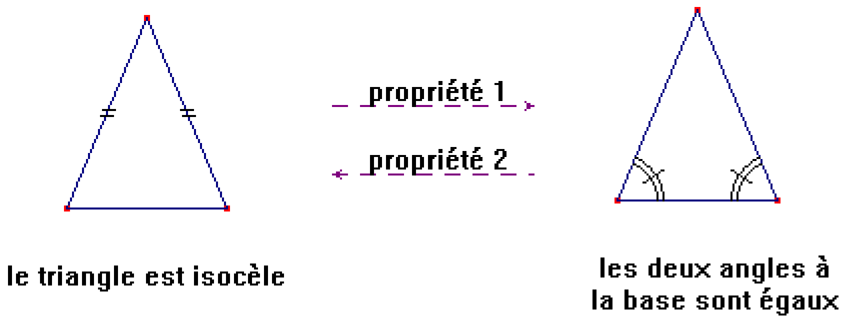
Propriétés **Cas du triangle rectangle**

1. **Si** un triangle est rectangle, **alors** la somme de ses deux angles aigus est égales à 90° : on dit que ses angles aigus sont complémentaires.
2. Réciproquement, **si** un triangle a deux angles complémentaires, **alors** il est rectangle.



Propriétés **Cas du triangle isocèle**

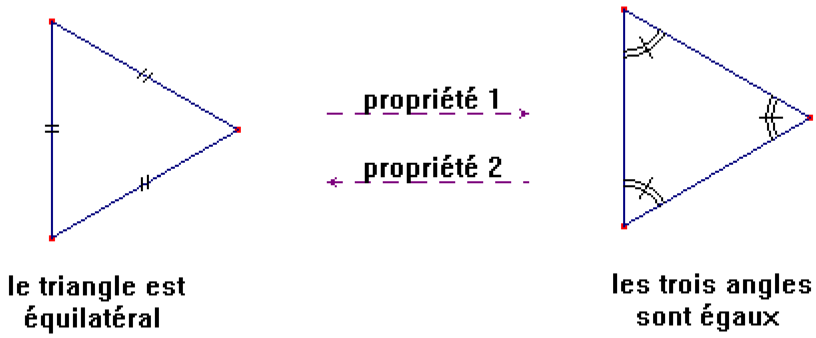
1. **Si** un triangle est isocèle, **alors** ses deux angles à la base ont la même mesure.
2. Réciproquement, **si** un triangle a deux angles de même mesure, **alors** il est isocèle.



Propriétés **Cas du triangle équilatéral**

Si un triangle est équilatéral, **alors** ses trois angles ont égaux et mesurent 60°.

Réciproquement, **si** un triangle a tous ses angles égaux, **alors** il est équilatéral.



Démonstration

Toutes ces propriétés ont été démontrées en classe à partir du théorème du paragraphe IV : « Théorème Dans tous les triangles, la somme des mesures des trois angles est égale à 180° ».