Séquence n°4

DES SITUATIONS DE PROPORTIONNALITE…

I. *Qu'est-ce qu'une situation de proportionnalité ?*

Définition

Deux ***grandeurs*** sont ***proportionnelles*** si les valeurs de l'une s'obtiennent en ***multipliant*** (ou en ***divisant***) les valeurs de l'autre ***par un même nombre***.

On appelle **coefficient de proportionnalité** le nombre qui multiplié par les valeurs d'une grandeur permet d'obtenir les valeurs de l'autre.

Exemples

¤ Sur le marché, lorsque des tomates sont indiquées à 1,80 €/kg, cela signifie que le prix à payer *est proportionnel à* la masse de tomates achetées : « si la masse double, le prix aussi… »

¤ Le périmètre d'un carré *est proportionnel à* la longueur de son côté : il est égal à quatre fois la longueur du côté.

Contre-exemple La masse d'un enfant n'est pas proportionnelle à son âge : « quand l'âge double, la masse ne double heureusement pas ! »

II. *Utiliser un tableau pour étudier une situation de proportionnalité*

On peut représenter et étudier une situation de proportionnalité à l'aide d'un tableau dit ***tableau de proportionnalité***.

Attention, tous les tableaux ne sont pas des tableaux de proportionnalité ! Il faut d'abord étudier la situation, comme dans les exemples du paragraphe ***I.*** pour savoir s'il y a une situation de proportionnalité.

EXERCICE TYPE 1 Compléter un tableau de proportionnalité

Le prix payé pour un achat en carburant est **proportionnel** au nombre de litres mis dans le réservoir.

A l'aide du tableau de proportionnalité ci-dessous, calculer le plus simplement possible les nombres A, B, C et D.

Avant de calculer, je cherche la méthode la plus simple !

		Colonne 1	Colonne 2	Colonne 3	Colonne 4	Colonne 5
Grandeur 1	Volume de carburant (en L)	5	7,5	**D**	10	**C**
Grandeur 2	Prix (en €)	6	**A**	39	**B**	15

coefficient de proportionnalité

$\times \frac{6}{5} = 1,2$

$\div 1,2$

Solution - Plusieurs méthodes pour compléter un tableau de proportionnalité

✓ En **utilisant le coefficient de proportionnalité** entre les deux grandeurs.
Ici, le coefficient de proportionnalité est le nombre qui multiplié par 5 donne 6 : $5 \times ? = 6$.

On l'obtient donc en effectuant le calcul suivant : $6 \div 5 = \frac{6}{5} = 1,2$.

Le coefficient de proportionnalité représente ici « le prix pour 1 L de carburant. »

- Par exemple, il permet de calculer A (en multipliant) : $\mathbf{A} = 7,5 \times \frac{6}{5} = 7,5 \times \mathbf{1,2} = 9$
- Il permet aussi de calculer D (en divisant) : $\mathbf{D} = 39 \div \mathbf{1,2} = 32,5$

✓ Pour trouver **B** et **C**, il y a des méthodes plus simples (uniquement par calcul mental) en cherchant des **astuces sur les colonnes** :

- La colonne 4 est le double de la colonne 1.
  On a donc simplement : **B** = 6**×2** = 12
- Comme A = 9, la colonne 5 est en fait la somme des colonnes 1 et 2 : « acheter pour 15 € d'essence revient à acheter pour 6 € puis pour 9€… »
  On a donc simplement : **C** = **5+7,5** = 12,5

EXERCICE TYPE 2 **Déterminer si un tableau est un tableau de proportionnalité ?**

Les tableaux suivants sont-ils des tableaux de proportionnalité ?

Tableau 1

3	7	10
4,8	11,2	16

Tableau 2

5	4	11
10,5	8,12	23,1

Solution

On calcule pour chaque colonne le coefficient pour vérifier si c'est toujours le même…

Tableau 1 : $\frac{4,8}{3} = \mathbf{1,6}$; $\frac{11,2}{7} = \mathbf{1,6}$; $\frac{16}{10} = \mathbf{1,6}$.

Tous les coefficients sont égaux, donc ce tableau est un tableau de proportionnalité de coefficient de proportionnalité 1,6.

Tableau 2 : $\frac{10,5}{5} = \mathbf{2,1}$; $\frac{8,12}{4} = \mathbf{2,03}$.

Deux coefficients ne sont pas égaux, donc ce tableau ne peut pas être un tableau de proportionnalité.

III. *Egalité des produits en croix*

Dans un tableau de proportionnalité, les produits dans les diagonales sont égaux : on parle d'***égalité des produits en croix***.

EXERCICE TYPE 3 **Proportions égales ?**

Compléter les pointillés par **=** ou **≠** pour indiquer si les proportions suivantes sont <u>exactement</u> égales ou non ? Justifier.

a. $\frac{3,5}{2,1}$ … $\frac{5}{3}$ **b.** $\frac{5}{10,5}$ … $\frac{2}{4,1}$ **c.** $\frac{11}{15}$ … $\frac{22}{30}$

Solution

Deux proportions égales (ou fractions égales) représentent une situation de proportionnalité d'après la règle fondamentale de la séquence n°3.

a. Calculons les produits en croix : 3,5 × 3 = **10,5** et 2,1 × 5 = **10,5**.
Comme les produits en croix sont égaux, les proportions sont égales : $\frac{3,5}{2,1} \mathbf{=} \frac{5}{3}$

b. Calculons les produits en croix : 5 × 4,1 = **20,5** et 10,5 × 2 = **21**.
Comme les produits en croix ne sont pas égaux : $\frac{5}{10,5} \mathbf{\neq} \frac{2}{4,1}$

c. Inutile d'utiliser le produit en croix ici : ce n'est pas la méthode la plus simple !
Il est plus facile d'utiliser le coefficient : $\frac{11}{15} \mathbf{=} \frac{22}{30}$

×2

EXERCICE TYPE 4 **Une situation avec des pourcentages…**

D'après une étude publiée en 1995 :

- En 1968, sur une population totale de 49,7 millions de français, environ 1,9 millions de personnes étaient atteints d'allergie respiratoire.
- De nos jours, ils représenteraient 30 % de la population en France.

Compléter le tableau ci-dessous à partir des données de 1968 puis déterminer le pourcentage de la population atteinte d'allergie respiratoire en 1968 afin de constater l'augmentation inquiétante de cette allergie.

En 1968	Allergie respiratoire	Total
Nombre de personnes (en millions)	**1,9**	**49,7**
Proportion (en pourcentage)	**P = ?**	**100**

Solution

Les pourcentages représentent des proportions : il s'agit donc d'un tableau proportionnalité où les produits en croix sont égaux.

On a donc : $1{,}9 \times 100 = 49{,}7 \times \mathbf{P}$ d'où $\mathbf{P} = 1{,}9 \times 100 \div \mathbf{49{,}7} \approx 3{,}8$

Le pourcentage de la population atteinte d'allergie respiratoire est donc estimé à 3,8 % en 1968 contre 30 % de nos jours…

IV. *Utiliser une échelle : une situation de proportionnalité en géométrie*

Définition Lorsque les dimensions du dessin d'un objet sont proportionnelles aux dimensions de cet objet (exprimées avec la même unité), on appelle ***échelle*** le quotient :

$$\boxed{\mathbf{e} = \frac{\text{longueur sur } \textbf{dessin/figure/carte}}{\text{longueur } \textbf{réelle}}}$$

exprimées dans la même unité…

EXERCICE TYPE 5 **Exemple de réduction : l'échelle d'une carte géographique**

1. Sur une carte, la distance entre Carcassonne et Lézignan (35 km) mesure 17,5 cm.
   Quelle est l'échelle de cette carte ?
2. Sur cette carte, ma maison est située à 2,7 cm du collège.
   Quelle est la distance réelle entre ma maison et le collège ?

Solution

1. On convertit d'abord dans la **même unité** : 35 km = 35 000 m = 3 500 000 cm

$$\mathbf{e} = \frac{\text{longueur sur } \textbf{carte}}{\text{longueur } \textbf{réelle}} = \frac{17{,}5}{3\ 500\ 000} \quad \text{(en cm)}$$

Avec la calculatrice, on obtient l'échelle sous forme simplifiée : $\mathbf{e} = \dfrac{1}{200\ 000}$.

2. ¤ *Méthode 1 :* en utilisant l'échelle de la carte.

$$\mathbf{e} = \frac{\text{longueur sur } \textbf{carte}}{\text{longueur } \textbf{réelle}} = \frac{1}{200\ 000} = \frac{2{,}7}{?} \quad \text{(en cm)}$$

Le calcul à effectuer est donc : $2{,}7 \times 200\ 000 \div 1 = 540\ 000$.
La distance réelle entre ma maison et le collège est de 540 000 cm, soit 5,4 km.

¤ *Méthode 2 :* en utilisant toutes les longueurs données dans l'énoncé

$$\mathbf{e} = \frac{\text{longueur sur } \textbf{carte}}{\text{longueur } \textbf{réelle}} = \frac{17{,}5}{3\ 500\ 000} = \frac{2{,}7}{?} \quad \text{(en cm)}$$

Le calcul à effectuer est donc : $2{,}7 \times 3\ 500\ 000 \div 17{,}5 = 540\ 000$.
La distance réelle entre ma maison et le collège est de 540 000 cm, soit 5,4 km.

EXERCICE TYPE 6 **Exemple d'agrandissement : observation au microscope**

Suite à une observation au microscope, une cellule d'épiderme d'oignon a été représentée sur un croquis avec une longueur de 10,2 cm. L'agrandissement a été de « × 600 ».
Quelle est la longueur réelle de cette cellule ?

<u>*Solution*</u> $\textbf{e} = \dfrac{\text{longueur sur } \textbf{croquis}}{\text{longueur } \textbf{réelle}} = \dfrac{600}{1} = \dfrac{10{,}2}{?}$ (en cm)

Le calcul à effectuer est donc : $10{,}2 \times 1 \div 600 = 0{,}017$.

La longueur réelle de cette cellule est donc de 0,017 cm = 0,17 mm = 170 µm.

<u>*Remarque*</u>

✓ S'il s'agit d'une **réduction**, l'échelle est inférieure à 1. (exercice type 5)

L'échelle $\dfrac{1}{1000}$ signifie « 1 cm sur le dessin représente 1000 cm en réalité. »

✓ S'il s'agit d'un **agrandissement**, l'échelle est supérieure à 1. (exercice type 6)

L'échelle $\dfrac{3}{1}$ signifie « 3 cm sur le dessin représente 1 cm en réalité. »

V. *Convertir des durées*

<u>*A savoir*</u>

- 1 h = 60 min
- 1 min = 60 s
- 1 h = 3 600 s
- 1 j = 24 h
- *Demi-heure* : 30 min = $\dfrac{1}{2}$ h = 0,5 h
- *Quart d'heure* : 15 min = $\dfrac{1}{4}$ h = 0,25 h
- *Trois quarts d'heure* : 45 min = $\dfrac{3}{4}$ h = 0,75 h

EXERCICE TYPE 7 Convertir 4 h 25 min et 4,25 h en minutes.

<u>*Solution*</u>

- 4 h 25 min = 4 h + 25 min = 4×60 min + 25 min = 240 min + 25 min = 265 min
- 4,25 h = 4,25 × 60 min = 255 min (*ou* 4h + 0,25 h = 240 min + 15 min = 255 min)

<u>*Remarque*</u>

⚠ Ne pas confondre écriture horaire et écriture décimale : **4 h 25 min ≠ 4,25 h**