Fiche n°3

DES NOMBRES EN ECRITURES FRACTIONNAIRES

I. *Plusieurs formes d'écritures pour un même nombre*

Notation et vocabulaire

Pour **d** ≠ 0, $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}}$ est une **écriture fractionnaire**.

On dit que $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}}$ est le **quotient de n par d** : $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}} = \mathbf{n} \div \mathbf{d}$

Lorsque **n** et **d** sont des ***entiers*** (**d** ≠ 0), $\frac{\mathbf{n}}{\mathbf{d}}$ est appelé une ***fraction***.

numérateur

Dénominateur

Quatre écritures du **même nombre**.

Exemple

Notons A le nombre 0,25. On peut aussi écrire que : $0{,}25 = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{100}} = \frac{\mathbf{2{,}5}}{\mathbf{10}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}$.

¤ 0,25 est une ***écriture décimale*** du nombre A ;

¤ $\frac{25}{100}$ est une ***fraction décimale*** (quand le dénominateur est 10, 100, 1 000, etc.)

¤ $\frac{2{,}5}{10}$ est une ***écriture fractionnaire*** : A est le ***quotient*** de 2,5 par 10 ;

¤ $\frac{25}{100}$ et $\frac{1}{4}$ sont deux ***fractions*** qui représentent le même nombre A ;

EXERCICE TYPE 1 Par quel nombre faut-il multiplier 8 pour obtenir 34 ?

Solution

Le nombre cherché est $\frac{\mathbf{34}}{\mathbf{8}}$, c'est-à-dire le quotient de 34 par 8 : $8 \times \frac{\mathbf{34}}{\mathbf{8}} = 34$.

Remarque Il n'y a qu'un seul nombre possible mais plusieurs écritures possibles pour $\frac{\mathbf{34}}{\mathbf{8}}$:

¤ Cette fraction a une écriture décimale : $\frac{34}{8} = 34 \div 8 = \mathbf{4{,}25}$ (valeur exacte).

¤ Cette fraction peut aussi s'écrire « simplifiée » par 2 : $\frac{34}{8} = \frac{17 \times 2}{4 \times 2} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{4}}$.

EXERCICE TYPE 2 Par quel nombre faut-il multiplier 7 pour obtenir 53 ?

Solution

Le nombre cherché est $\frac{\mathbf{53}}{\mathbf{7}}$, c'est-à-dire le quotient de 53 par 7 : $7 \times \frac{\mathbf{53}}{\mathbf{7}} = 53$.

Remarque Attention, cette fraction n'a pas d'écriture décimale.

¤ $\frac{53}{7} \approx$ 7 ,571428 571428 571428 571428… La division de 53 par 7 ne s'arrête jamais !

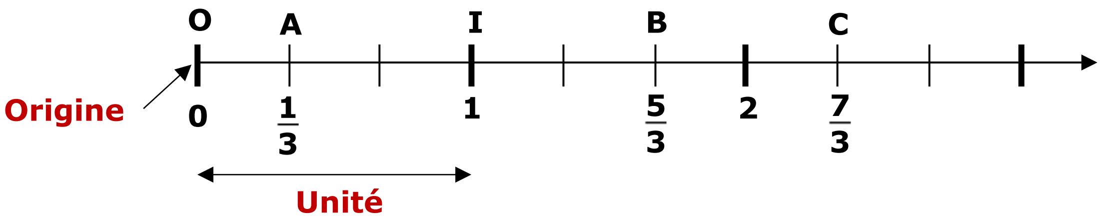
¤ Au dixième près, on peut écrire l'**encadrement** : $\mathbf{7{,}5 < \frac{53}{7} < 7{,}6}$

ou encore : $\frac{53}{7} \approx 7{,}5$ (troncature au dixième : « on coupe au dixième »)

ou encore : $\frac{53}{7} \approx 7{,}6$ (valeur arrondie au dixième : « la plus proche »)

II. *Sur un axe gradué*

<u>Autour d'un exemple</u>



L'unité est la distance entre l'origine O et le point I d'**abscisse** 1.

Sur cette demi-droite graduée, les graduations partagent l'unité en 3 segments égaux.
On peut donc dire par exemple que :

- ¤ l'abscisse du point A est $\mathbf{\frac{1}{3}}$;
- ¤ l'abscisse du point B est $\mathbf{\frac{5}{3}}$ ou encore $\mathbf{1 + \frac{2}{3}}$.

III. *Des écritures fractionnaires égales : REGLE FONDAMENTALE*

<u>*Propriété*</u>

> La valeur d'une fraction ne change pas si l'on multiplie (ou si l'on divise) par un même nombre non nul son numérateur et son dénominateur.

<u>*Exemples*</u>

¤ $\frac{4}{5} = \frac{4 \times \mathbf{3}}{5 \times \mathbf{3}} = \frac{12}{15}$

¤ $\frac{14}{21} = \frac{2 \times \mathbf{7}}{3 \times \mathbf{7}} = \frac{2}{3}$ On dit que l' « on a ***simplifié*** la fraction $\frac{14}{21}$ par 7 ».

¤ Cette propriété est vraie pour toute écriture fractionnaire :

$$\frac{8,4}{0,04} = \frac{8,4 \times \mathbf{100}}{0,04 \times \mathbf{100}} = \frac{840}{4} = 210$$

Autrement dit, diviser 8,4 par 0,04 revient à diviser 840 par 4 (plus facile ☺...).

<u>Règles</u> (à connaître par cœur, pour pouvoir simplifier des fractions)

Un nombre entier est :
- ¤ ***divisible par 2*** si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- ¤ ***divisible par 5*** si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- ¤ ***divisible par 10*** si son chiffre des unités est 0 ;
- ¤ ***divisible par 3*** si la somme de ces chiffres est divisible par 3 ;
- ¤ ***divisible par 9*** si la somme de ces chiffres est divisible par 9.

<u>*Exemples*</u> Parmi les entiers suivants : 19 ; 25 ; 27 ; 40 ; 132 ; 133 ; 246 ; 2 385 ; 17 124

- ¤ les entiers divisibles par 2 sont : 4**0** ; 13**2** ; 24**6** ; 17 12**4**
- ¤ les entiers divisibles par 5 sont : 2**5** ; 4**0** ; 2 38**5**
- ¤ l'entier divisible par 10 est : 4**0**

1+7+1+2+4 = 15
et 15 est dans la table de 3…

- ¤ les entiers divisibles par 3 sont : 27 ; 132 ; 246 ; 2 385 ; 17 124
- ¤ les entiers divisibles par 9 sont : 27 ; 2 385

2+3+8+5 = 18 et 18 est dans la table de 9.

EXERCICE TYPE 3 Donner une écriture fractionnaire la plus simple possible de $\mathbf{\frac{954}{216}}$.

Solution En utilisant les règles de divisibilité, on peut constater que les nombres 954 et 216 sont divisibles par **2** et par **9** :

$$\frac{954}{216} = \frac{477 \times \mathbf{2}}{108 \times \mathbf{2}} = \frac{477}{108} = \frac{53 \times \mathbf{9}}{12 \times \mathbf{9}} = \boxed{\frac{53}{12}}$$

Remarques ¤ La calculatrice donne toujours des fractions simplifiées : cela peut donc aider et permet de vérifier ses calculs…

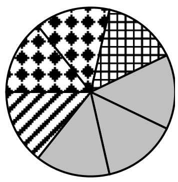
¤ Avec la calculatrice, on obtient que l'écriture simplifiée de $\frac{954}{216}$ est $\frac{53}{12}$.

On peut alors écrire : $\frac{954}{216} = \frac{53 \times \mathbf{18}}{12 \times \mathbf{18}} = \boxed{\frac{53}{12}}$ car $954 \div 53 = 18$.

IV. *Proportions et pourcentages*

EXERCICE TYPE 4 **Déterminer et utiliser une proportion.**

Marc habite un village où toutes les familles ont au moins un animal domestique.
Le diagramme circulaire ci-contre représente la totalité des familles de ce village : il a été partagé en parts égales.



Proportion des familles possédant :
seulement un chien ;
seulement un chat ;
un chien et un chat ;
un seul animal, mais autre qu'un chien ou un chat.

1. Quelle est la proportion des familles qui possèdent :
a. seulement un chien ? ***b.*** un seul animal (chien, chat ou autre) ?

2. Le village de Marc compte 56 familles.
Combien de familles ont seulement un chien dans le village de Marc ?

Solution

1. a. D'après le diagramme circulaire, la proportion des familles qui possèdent seulement un chien est $\frac{2}{7}$.

b. Les familles qui possède un seul animal ont soit seulement un chien, soit seulement un chat, soit un seul animal autre qu'un chien ou un chat.
D'après le diagramme circulaire, la proportion des familles qui possèdent un seul animal (chien, chat ou autre) est $\frac{4}{7}$.

2. Le village de Marc compte 56 familles et $\frac{2}{7}$ de ces familles ont seulement un chien.

1ère méthode Le problème revient à écrire : $\frac{2}{7} = \frac{?}{56}$.
Avec la règle fondamentale, comme $7\times\mathbf{8} = 56$, on calcule : $2\times\mathbf{8} = 16$

2ème méthode On calcule $\frac{2}{7}$ de 56 : $56 \div 7 \times 2 = \frac{56 \times 2}{7} = 16$

Conclusion : *Dans le village de Marc, 16 familles ont seulement un chien.*

EXERCICE TYPE 5 **Exprimer une proportion en pourcentage.**

Dans un jeu de 32 cartes, quel la proportion, en pourcentage, des figures (V, D ou R).

Solution

Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 couleurs soit 12 figures (V, D ou R).

La proportion de figures dans un jeu de 32 cartes est donc : $\frac{12}{32} = \frac{3\times4}{8\times4} = \frac{3}{8}$

Trouvons une écriture de $\frac{3}{8}$ avec un dénominateur 100 : $\frac{3}{8} = \frac{..?..}{\mathbf{100}}$

Pourcentage : **? % =** $\frac{\mathbf{?}}{\mathbf{100}}$

× ?

100 ÷ 8 = **12,5**

Avec la règle fondamentale : $\frac{3}{8} = \frac{3 \times \mathbf{12,5}}{8 \times \mathbf{12,5}} = \frac{12,5}{100}$

Il y a 12,5 % de figures dans un jeu de 32 cartes.

V. *Comparer des proportions*

Définition **Comparer** deux nombres, c'est trouver quel est le nombre le plus petit ou le nombre le plus grand ou s'ils sont égaux.

Remarque Pour comparer deux proportions, il faut que les proportions soient comptées **dans la même unité** (cf. activité Mini-combis)

Méthode Autrement dit, pour comparer deux fractions, on utilise :

- soit la forme fractionnaire avec un même dénominateur ;
- soit, si c'est possible, leur écriture décimale.

EXERCICE TYPE 6 Un gourmand préfèrera-t-il manger les trois-quarts d'une tablette de chocolat ou plutôt 73 % de cette tablette ?

Solution

Ce problème revient à comparer les fractions $\frac{3}{4}$ et $\frac{73}{100}$

Pourcentage : **73 % =** $\frac{\mathbf{73}}{\mathbf{100}}$

- ***1ère méthode : avec des écritures fractionnaires***

Trouvons une écriture de $\frac{3}{4}$ avec un dénominateur 100 : $\frac{3}{4} = \frac{..?..}{100}$

On applique la règle fondamentale : $\frac{3}{4} = \frac{3 \times \mathbf{25}}{4 \times \mathbf{25}} = \frac{75}{100}$.

× ?

100 ÷ 4 = **25**

Comme $\frac{75}{100} > \frac{73}{100}$, on peut conclure que $\frac{3}{4} > \frac{73}{100}$.

- ***2ème méthode : avec des écritures décimales***

Comme 73 % = $\frac{73}{100}$ = 0,73 et $\frac{3}{4}$ = 0,75, on peut conclure que $\frac{3}{4}$ > 73 %

Conclusion : *Le gourmand préfèrera manger les trois-quarts plutôt que 73 % de la tablette.*